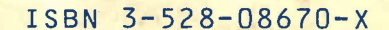
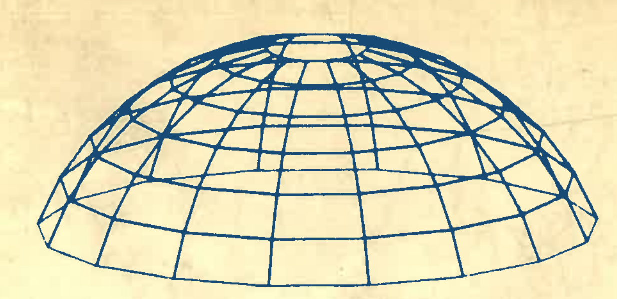
Die Stoffauswahl des Buches orientiert sich an den üblichen Lehrinhalten der Baustatik: Ermittlung von Zustands-, Biege- und Einflußlinie, Weg- und Kraftgrößenverfahren, Drehwinkel- und Übertragungsverfahren, Verfahren von Kani, Einführungen in die Stabilitätsberechnung und die geometrisch nichtlineare Berechnung. Auf der Grundlage der Matrizenrechnung wird ein Einblick in die computerorientierten Verfahren gegeben. Alle Rechenverfahren werden an Beispielen erläutert. Das Buch ist vor allem für Studierende des Bauingenieurwesens an Hoch- und Fachhochschulen gedacht, eignet sich aber auch zum Selbststudium.


ISBN 3-528-08670-X

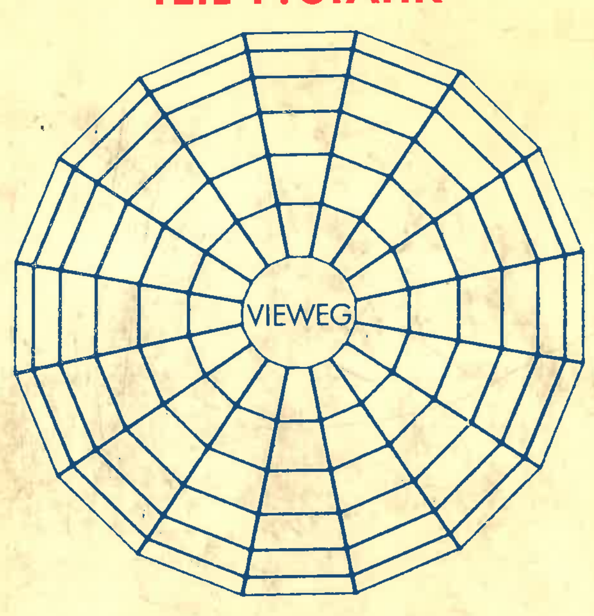


LAWO · THIERAUF

STABTRAGWERKE



MATRIZENMETHODEN DER STATIK UND DYNAMIK TEIL 1 : STATIK



Michael Lawo · Georg Thierauf

Stabtragwerke

Matrizenmethoden der Statik und Dynamik

Teil I: Statik



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Lawo, Michael:
Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik/Michael Lawo; Georg Thierauf. – Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

NE: Thierauf, Georg:

Teil 1. Statik. – 1980.
ISBN 3-528-08670-X

Prof. Dr.-Ing. *Georg Thierauf* und Dipl.-Ing. *Michael Lawo*, wissenschaftlicher Assistent, sind an der Gesamthochschule der Universität Essen im Bereich Bauwesen – Fachgebiet Baumechanik/Statik – tätig.

Umschlagentwurf: Peter Neitzke, Köln
Druck: fotokop, Darmstadt
Buchbinderische Verarbeitung: P. Junghans, Darmstadt

ISBN 3-528-08670-X

Vorwort

Die Stoffauswahl dieses Buches ist an den üblichen Lehrinhalten der Statik der Tragwerke für Bauingenieure orientiert und setzt damit die Grundkenntnisse der Technischen Mechanik voraus.
Die Darstellung der Lehrinhalte hingegen ist auf ein den Verfassern zeitgemäß erscheinendes Hilfsmittel ausgerichtet, die programmgesteuerte Rechenanlage, wie sie heute in zunehmendem Maße auch Eingang in kleinere und mittlere Ingenieurbüros findet.
Die Formalisierung der Rechenverfahren, die für eine computergerechte Darstellung erforderlich ist, bringt zweifelsohne Nachteile mit sich:
Die Fähigkeit des Abschätzens, der überschlägigen Dimensionierung eines Bauteils oder Tragwerkes und möglicherweise auch das kritische Urteilsvermögen, mit dem der Ingenieur traditionsgemäß seine Tragwerke zu betrachten gelernt hat, werden durch die Systematisierung verdrängt. Bei einer ausschließlichen Beschränkung auf eine "formale" Statik gingen uns deshalb viele Fähigkeiten verloren, die keine Rechenanlage ersetzen wird. Andererseits kann jedoch ein Hilfsmittel mit dem Rechenzeiten von Stunden auf Bruchteile von Sekunden reduziert werden, nicht ohne Einfluß auf die Baustatik bleiben, die von jeher das Methodische in den Vordergrund gestellt hat.

Viele der früher üblichen Näherungen, die nur auf eine Reduzierung der Rechenarbeit abzielten, verlieren nämlich mit dem Einsatz einer Rechenanlage an Bedeutung. Größere Systeme werden einer Berechnung zugänglich; die Fehlerursachen verlagern sich von reinen Rechenfehlern zu Programm- oder Eingabefehlern. Die Zahlengenauigkeit einer elektronischen Berechnung verleitet zu Fehleinschätzungen der Ergebnisse, die numerische Richtigkeit einer Berechnung kann irrtümlich mit der Genauigkeit der Approximation des mechanischen Pro-

blemes gleichgesetzt werden.
Aufgrund solcher Überlegungen erscheint es angebracht, die modernen Berechnungsmethoden auf eigenständiger Grundlage darzustellen und eine Verbindung zu den bekannten Verfahren nur in soweit zu suchen, wie es zum Verständnis und für die praktische Anwendung der "neuen" Methoden beiträgt.
Dies entspricht auch dem Lehrkonzept, das den gleichnamigen Lehrveranstaltungen zugrunde liegt: In einführenden, zweisemestrigen Lehrveranstaltungen wird der Studierende zunächst mit den "klassischen" Verfahren der Baustatik vertraut gemacht. Die Matrizenmethoden sind als eine Fortführung und Ergänzung dieser Lehrveranstaltungen konzipiert.

Im ersten Kapitel sind Grundlagen dargestellt. Vom zweiten bis zum vierten Kapitel werden Stabwerke als starre Körper behandelt und die Begriffe "statisch bestimmt" und "statisch unbestimmt" definiert.
Nach der Beschreibung des Verformungsverhaltens von Stabelementen im fünften Kapitel folgt eine ausführliche Darstellung des Weggrößenverfahrens (Kapitel 6). Hierbei wird auch auf das bekannte Drehwinkelverfahren eingegangen. Die Berechnung von Stabwerken mit verteilter Belastung, Temperatureinwirkung, Stützensenkung und mit wandernden Einzellasten (Einflußlinien) ist Gegenstand der beiden folgenden Kapitel (7 und 8).
Auf das Kraftgrößenverfahren, das üblicherweise in den Lehrveranstaltungen Baustatik an erster Stelle steht, wird hier aus didaktischen Gründen erst im Anschluß an das Weggrößenverfahren eingegangen (Kapitel 9).
Im zehnten und elften Kapitel werden das Verfahren der Übertragungsmatrizen (Reduktionsverfahren) und iterative Lösungsverfahren behandelt. Bei den iterativen Verfahren ergibt sich der Zusammenhang mit dem bekannten Kani-Verfahren, das auch heute noch häufig angewendet wird.
Die folgenden beiden Kapitel (12 und 13) sind eine Einführung in die Stabilitätsberechnung ebener Stabwerke und in

die Berechnung ebener Stabwerke mit großen Verformungen. Die Beschränkung auf den ideal-elastischen Werkstoff ist vom Stoffumfang her gesehen erforderlich.
Im Kapitel vierzehn werden abschließend einige Aspekte der Programmierung aufgezeigt.

Vom zweiten bis zum fünften Kapitel werden die Grundlagen der Matrizenstatik dargelegt. Der Schwerpunkt des Buches liegt darauf aufbauend in den Kapiteln sechs, sieben und acht und weiterhin in den Kapiteln zwölf und dreizehn. Diese Kapitel sind besonders für die Programmierung und die Programmanwendung von Bedeutung.
Die Kapitel zehn und elf und die Abschnitte 6.4 bis 6.6 sind besonders für die Handrechnung und für Kontrollrechnungen gedacht.
Zur Abrundung der Darstellung und um Einblicke in spezielle Gebiete zu geben, wurden die Kapitel eins, neun und vierzehn aufgenommen.

Obwohl es sich an vielen Stellen anbietet, die Methode der Finiten Elemente in demselben Kontext zu behandeln, wurde hierauf aus verschiedenen Gründen verzichtet: Zum einen würde dies weitergehende Grundkenntnisse der Elastizitätstheorie, der angewandten Mathematik und der Programmierung erfordern, als sie hier vorausgesetzt sind. Es würde aber auch den Stoffumfang erheblich erweitern und deshalb den Rahmen einer Grundveranstaltung im Bauingenieurwesen verlassen. Die Methode der Finiten Elemente wird deshalb als fortführende Lehrveranstaltung im Vertiefungsstudium gesehen.

Bei der Vorbereitung des Manuskriptes, der Ausarbeitung von Beispielen, der Erstellung und Implementierung von Programmsystemen zur Lösung von Übungsaufgaben wurden die Verfasser von allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Fachgebietes Baumechanik-Baustatik an der Gesamthochschule Essen unterstützt und möchten sich für diese mühevolle Ar-

beit hier bedanken. Nicht zuletzt möchten die Verfasser Frau Kaufel, Frau Mehl und Frau Nischalke für die sorgfältige Erledigung der umfangreichen Schreib- und Zeichenarbeit ihren Dank aussprechen.

Das Manuskript und die berechneten Beispiele wurden mehrfach auf Richtigkeit überprüft. Bei aller Sorgfalt könnten trotzdem kleinere Unstimmigkeiten übersehen worden sein, und die Verfasser wären für diesbezügliche Hinweise, aber auch für sonstige Anregungen, sehr dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

Im folgenden sind die wichtigsten Bezeichnungen und Vereinbarungen zusammengestellt. Matrizen und Vektoren sind unterstrichen (_). Elementmatrizen und -vektoren werden im allgemeinen durch einen Kopfzeiger und Komponenten von Matrizen und Vektoren durch Fußzeiger gekennzeichnet. Größen in lokalen Koordinaten sind überstrichen (¯). Virtuelle Größen sind durch ein Dach (^) bezeichnet.

- Kräfte:

$\underline{F}$	Linear unabhängige Stabendkräfte
$\underline{S}$, $\underline{S}_R$, $\underline{S}^+$	Stabendkräfte
$\underline{R}$	Knotenlasten
$\underline{R}_u$, $\underline{R}_R$	Ersatzknotenlasten
$\underline{X}$	Statisch Unbestimmte

- Verformungen:

$\underline{v}$	Linear unabhängige Stabendverformungen
$\underline{u}$, $\underline{u}_u$, $\underline{u}_E$	Stabendverformungen, Vorverformungen
$\underline{r}$	Knotenverformungen

- Transformation von Kräften bzw. Verformungen:

$\underline{T}$	Gleichgewichtsmatrix in lokalen Koordinaten (Hyperdiagonalmatrix)
$\underline{L}$, $\underline{L}_D$	Drehungsmatrix
$\underline{C}$, $\underline{C}'$	Verknüpfungsmatrix
$\underline{a}^T$, $\underline{a}$	Gleichgewichtsmatrix, Verträglichkeitsmatrix
$\underline{B}_o$	Rechtsinverse von $\underline{a}^T$
$\underline{B}_x$	Kern von $\underline{a}^T$
$\underline{I}$	Einheitsmatrix

- Kraft-Verformungstransformationen:

$\underline{f}$	Flexibilitätsmatrix
$\underline{k}_r$	Steifigkeitsmatrix, Inverse von $\underline{f}$
$\underline{k}$, $\underline{k}_e$	Erweiterte Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}$, $\underline{K}'$, $\underline{K}^e$	Gesamtsteifigkeitsmatrix (elastisch)
$\underline{k}_g$, $\underline{K}^g$	Geometrische Steifigkeitsmatrix

- Einflußlinien:

$g(\bar{x},r_i)$	Einflußlinie für eine Knotenverformung
$g(\bar{x},S_j^i)$	Einflußlinie für eine Stabendkraft
$g(\bar{x},R_i^\ell)$	Einflußlinie für eine Auflagerreaktion

- Übertragungsverfahren:

$\underline{U}$, $\underline{\tilde{U}}$, $\underline{\bar{U}}$	Übertragungsmatrizen
$\underline{\bar{Z}}$, $\underline{Z}$	Zustandsvektoren
$\underline{G}$	Gleichgewichtsmatrix für das Übertragungsverfahren

- Skalare Größen:

N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z	Schnittgrößen als Funktionen der lokalen Koordinate $\bar{x}$
u_x, w_y, w_z, ϑ_x, φ_y, φ_z	Verformungsgrößen als Funktionen der lokalen Koordinate $\bar{x}$
A, I_y, I_z, I_T	Querschnittswerte
E, G, μ	Materialkonstanten
σ, τ	Spannungskomponenten
ε, γ	Verformungskomponenten

1 Einführung

Im folgenden werden zunächst die Einflüsse aufgezeigt, welche die Statik der Tragwerke entscheidend beeinflußt haben. Es folgt eine Darstellung der Grundlagen, auf die das Buch aufbaut, zusammen mit einer Definition der Zielsetzungen. Die darauf folgenden beiden Abschnitte dieses Kapitels behandeln die grundlegenden Annahmen und geben Hinweise zur Bearbeitung von Übungaufgaben, die am Schluß der Kapitel zwei bis zwölf aufgeführt sind.

1.1 Rechenverfahren und Rechenhilfsmittel in der Statik

Die Statik war zu allen Zeiten auf Rechenhilfsmittel angewiesen; für die Umsetzung der Erkenntnisse der Elastizitätstheorie in die Praxis mußten "Verfahren" entwickelt werden, die einfach und leicht verständlich sind und mit den üblichen Hilfsmitteln durchgeführt werden können.
Das übliche Hilfsmittel des Ingenieurs im letzten Jahrhundert war das Zeichenbrett. Es erstaunt deshalb nicht, daß sich die Culmann'sche graphische Statik (Culmann 1821-1881) so großer Beliebtheit erfreute.
Das erste Lehrbuch der Statik wurde von dem französischen Ingenieur C. L. M. H. Navier (1785-1836) /56/ verfaßt. Es ist eine Zusammenfassung des damaligen Wissensgebietes "Baustatik", ein "Resumée des Leçons Données á l'Ecole des Ponts et Chaussées (1827)" - eine Zusammenfassung der Vorlesungen also, die Navier am Polytechnikum für Brücken- und Straßenbau gehalten hat. Es war zu dieser Zeit bekannt, daß man bei Stabwerken zwischen statisch unbestimmten und statisch bestimmten Systemen unterscheiden mußte. Navier weist auch schon auf die Möglichkeit der Berechnung innerer Kräfte über die Verschiebungen der Knotenpunkte eines Stabwerkes hin.
Die erste vollständige Darstellung der Berechnung statisch

unbestimmter Fachwerke gibt Clerk Maxwell /46/ im Jahre 1864. Er beweist den nach ihm benannten Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen (Maxwell'scher Satz). Die ersten Anwendungen des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wie es von Lagrange in seiner analytischen Mechanik (Mécanique analytique) schon 1788 bewiesen wurde, findet man bei O. Mohr /50/. Von H. Müller-Breslau wird in seinem 1886 erschienenen Lehrbuch: "Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen" /53/ erstmals die vollständige Berechnung statisch unbestimmter Stabwerke dargestellt. Zu dieser Zeit waren die Sätze von F. Menabrea (/48/, 1858) und von A. Castigliano (/7/, 1873, 1875) über die Differentialquotienten der Formänderungsarbeit schon bekannt.
Spezielle baupraktische Anwendungen und Lösungsverfahren für die Elastizitätsgleichungen waren ebenfalls schon bekannt: So berechnet A. Clebsch in seinem Lehrbuch "Theorie der Elastizität fester Körper" (siehe /3/, Seite 166) einen durchlaufenden Balken mit dem Differenzenverfahren und stellt damit die "Dreimomentengleichung" auf.
Die Dreimomentengleichung war schon von Clapeyron 1857 aufgestellt worden (Clapeyron'sche Gleichungen); von O. Mohr /51/ wurde 1860 eine vollständige Lösung aufgezeigt. Die Bedeutung, die der Dreimomentengleichung zugemessen wurde, zeigt, daß man sich in der Statik schon sehr früh um eine problemgerechte Formulierung der Elastizitätsgleichungen bemühte: Ein lineares Gleichungssystem mit Tridiagonalmatrix (Dreimomentengleichung) ist nämlich eine Elementarform eines Gleichungssystems und äußerst einfach zu lösen.

In den Jahren von 1880 bis etwa 1890 wurden auch die Grundlagen für die Lösung baustatischer Aufgaben mit kinematischen Methoden gelegt. Erste Hinweise finden sich bei A. Föppl /20/ in seinem Lehrbuch "Theorie des Fachwerkes" (Leipzig 1880). In einer Abhandlung "Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne" im Zivilingenieur (Band 33,

1887) wird die Theorie von O. Mohr vertieft. Im Jahre 1888 zeigt R. Land /38/ in seinem Beitrag "Kinematische Theorie des statisch bestimmten Trägers" die Ermittlung von Einflußlinien mit kinematischen Methoden; eine zusammenfassende Darstellung gibt H. Müller-Breslau /54/ in seinen Lehrbüchern "Die graphische Statik der Baukonstruktionen" (Leipzig 1892). Die "graphische" Statik darf dabei nicht als rein zeichnerisches Verfahren gesehen werden: In den statisch bestimmten Systemen, wie sie bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme eingeführt werden müssen, werden Schnittgrößen und Verformungen auf zeichnerischem Wege, auf der Grundlage der Kinematik, bestimmt. Die statisch Unbestimmten werden mit einer "Hilfsrechnung" als Lösung eines linearen Gleichungssystemes berechnet.
Soweit es jedoch möglich war, vermied man die numerische Berechnung und gab den zeichnerischen Lösungen den Vorzug. Die "reziproken Kräftepläne" nach L. Cremona (1830-1903) waren für die "Berechnung" von Fachwerken ein unabdingbares Werkzeug. In komplizierteren Fällen und bei räumlichen Fachwerken wurde auf das Ritter'sche Schnittverfahren (/70/, 1863) zurückgegriffen.
Eine Abkehr von den graphischen Verfahren zeigt sich in dem Lehrbuch von M. Grüning /23/: "Die Statik des ebenen Tragwerkes". Grüning gibt in seinem Vorwort der "Analysis" den Vorzug: "Der Analysis und der Rechnung gebe ich im allgemeinen den Vorzug vor den graphischen Verfahren ... Auch führt nach meiner Erfahrung in statischen Untersuchungen die Rechnung häufig schneller zum Ziele und ist leichter zu prüfen als die Zeichnung" (Vorwort, Grüning).
Die vermehrte Bedeutung der numerischen Lösungsverfahren zeigt sich auch in vielen Arbeiten, die im ersten Viertel dieses Jahrhunderts entstanden und direkten Bezug zur Lösung linearer Gleichungssysteme aufweisen. Es sind dies die Arbeiten von A. Hertwig /27/ über die Lösung linearer Gleichungssysteme mit unendlichen Reihen, von M. Grüning /24/ über hochgradig statisch unbestimmte Systeme, von

F. Bleich/E. Melan /3/ über die Anwendung des Differenzenverfahrens, von A. Ostenfeld /58/ über "fünfgliedrige" Gleichungen, von F. Engesser /17/ über die Berechnung von Stockwerkrahmen und von G. Worch /91/ über die Anwendung des Reduktionssatzes.

Eine interessante Entwicklung zeigt sich in der Dissertation von V. Lewe (/41/, 1915): Das "Zahlenrechteck" für die Darstellung und Lösung von Gleichungssystemen, wie man sie bei der Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen erhält, wird "entdeckt". Mit dem Zahlenrechteck wird die Matrix (J. J. Sylvester 1850) im Bauingenieurwesen eingeführt. Auch die Determinantentheorie, die seit A. T. Vandermonde (1771) bekannt war, gewinnt an Bedeutung bei der Lösung von Stabilitätsproblemen (R. von Mises /49/).

Die Rechenhilfsmittel zu dieser Zeit waren sehr bescheiden: Der Rechenschieber war seit Patridge (1650) bekannt und wurde im letzten Jahrhundert zum Kennzeichen des Ingenieurs. Die Zeit der ersten Industrialisierung im vorigen Jahrhundert führte auch zu einer ersten fabrikmäßigen Herstellung von Rechenmaschinen, mit denen die vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden konnten. Nach K. Steinbuch/W. Weber /78/ waren jedoch bis 1878 nur etwa 1500 Rechenmaschinen dieser serienmäßigen Produktion verkauft. Es erstaunt deshalb wenig, wenn man die Fußnote von H. Müller-Breslau in seinem 1886 erstmals erschienenen Lehrbuch der Statik liest: "Die vielen Dezimalstellen sollen eine genaue Nachprüfung der Rechnung ... ermöglichen. Verfasser benutzt die Rechenmaschine Millionär, die gestattet, zwei 10-stellige Zahlen mit 10 Kurbeldrehungen zu multiplizieren. Das Rechnen mit großen Zahlen bereitet dann keine sonderliche Arbeit" (/53/, Seite 424). Was H. Müller-Breslau als "keine sonderliche Arbeit" klassifiziert, erscheint uns heute undenkbar - trotzdem, die Rechenleistung in Ingenieurbüros war noch lange Zeit von Rechenschieber und mechanischer Rechenmaschine abhängig: In einer Zeit, in der das Prinzip des "Rechenautomaten" schon lange bekannt war (C. Babbage,

1823; vgl. auch geschichtliche Entwicklung /78/), und als in den USA von 1939 bis 1944 die erste, für umfangreiche wissenschaftliche Rechnungen brauchbare "Großrechenanlage" in Betrieb genommen wurde (MARK I, Harvard University), standen dem Ingenieur noch bis 1961 meist nur der Rechenschieber oder eine mechanisch oder elektrisch betriebene Rechenmaschine zur Verfügung. Mit der Einführung elektronischer Tischrechenmaschinen im Jahre 1961 wurden diese Hilfsmittel allmählich verdrängt und haben heute den zum Teil programmierbaren Taschenrechnern Platz gemacht.
Im Hinblick auf die kargen Hilfsmittel erscheint es verständlich, daß sich die Forschung in der Baustatik lange Jahre auf die problemorientierte Formulierung und Lösung spezieller Aufgaben konzentrierte.
Einen größeren Einfluß auf die praktische Statik hatten zweifelsohne die Arbeiten von H. Cross (/13/, 1930) und von G. Kani (/33/, 1949). Die gemeinsame Grundlage der Verfahren von Cross und Kani ist die iterative Lösung der Elastizitätsgleichungen. Ein gemeinsames Merkmal ist die Anschaulichkeit des Lösungsweges. Es werden Biegemomente auf Knoten "fortgeleitet" oder "verteilt" und zwar anhand von skizzenhaften Darstellungen des statischen Systemes. Die Vernachlässigungen werden so gewählt, daß die zugrundeliegenden Iterationsverfahren genügend schnell konvergieren, und damit die Berechnungen mit Rechenschiebern oder mit einfachen Rechenmaschinen durchgeführt werden können. Gerade diese letzte Forderung wurde jedoch durch die Entwicklung neuer Bauweisen immer häufiger verletzt. Als "Rekord hinsichtlich der Anzahl der Unbekannten" erwähnt G. Worch /92/ in seinem Beitrag im Betonkalender 1960 den Entwurf für die Kuppel des Münchner Hauptbahnhofes. Hierbei handelte es sich um eine Rippenkuppel (Bild 1.1 (a)) mit 16 Bindern und 7 Ringen (112 Knotenpunkte). Durch Ausnutzung der Symmetrie konnte die Anzahl der Unbekannten von 672 auf die Hälfte reduziert werden. Es erscheint uns heute rätselhaft, wie man damals derartige Gleichungssysteme gelöst hat. "Re-

korde" wie dieser zeigen jedoch, daß in der Baustatik programmierbare Rechenmaschinen dringend benötigt wurden. Die erste Generation der Computer setzte sich aber erst im Jahre 1953 durch: Zu dieser Zeit wurden weltweit nur etwa 15 Großrechenanlagen gezählt; 1968 sind es schon etwa 30000 und 1977 hat sich die Anzahl verzehnfacht auf 300000 (/5/, Seite 3).

Der Wert des neuen Hilfsmittels wurde sofort erkannt und zwar zusammen mit der Notwendigkeit einer Neuformulierung der Statik.

Eine erste umfassende Darstellung gibt J. H. Argyris (/1/, 1957) mit seiner Arbeit "Die Matrizentheorie der Statik". Die computerorientierten Berechnungsverfahren, die "Methode der Finiten Elemente", zu deren Begründern Argyris zählt, sind heute aus der Statik und Dynamik nicht mehr wegzudenken. In seinem Beitrag "A Look into the Future - How Computers will influence Engineering" weisen J. H. Argyris und P. C. Patton (/2/, 1967) auf die neuen Möglichkeiten der Berechnungen hin, die sich durch den Einsatz von Computern ergeben: "Since these assumptions and linearizations date from an era in which the tools of analysis were pencil and paper, we should be willing to leave them behind and make less conservative assumptions more suited to our modern tool, the computer, our burgeoning research colleague".

Die Möglichkeiten, die sich durch den Computer bieten, werden von Ingenieuren genutzt und zwar sowohl in der Praxis als auch in der Forschung. Programmsysteme wurden entwikkelt, und der "Rekord" des Münchner Hauptbahnhofes könnte heute im Sekundenbereich der Central - Processing - Units (Rechnerkernzeit) gemessen werden. Nach einer Darstellung von W. Wurmnest (/93/, Bild 1.1 (b)) würde ein System mit 336 Freiheitsgraden etwa 190 CPU-Sekunden und einen Personalaufwand von etwa 20 Stunden für die Datenvorbereitung und Auswertung erfordern.

Eine Abschätzung des Zeitaufwandes bei einer Berechnung desselben Systems mit einer elektrischen Rechenmaschine ist

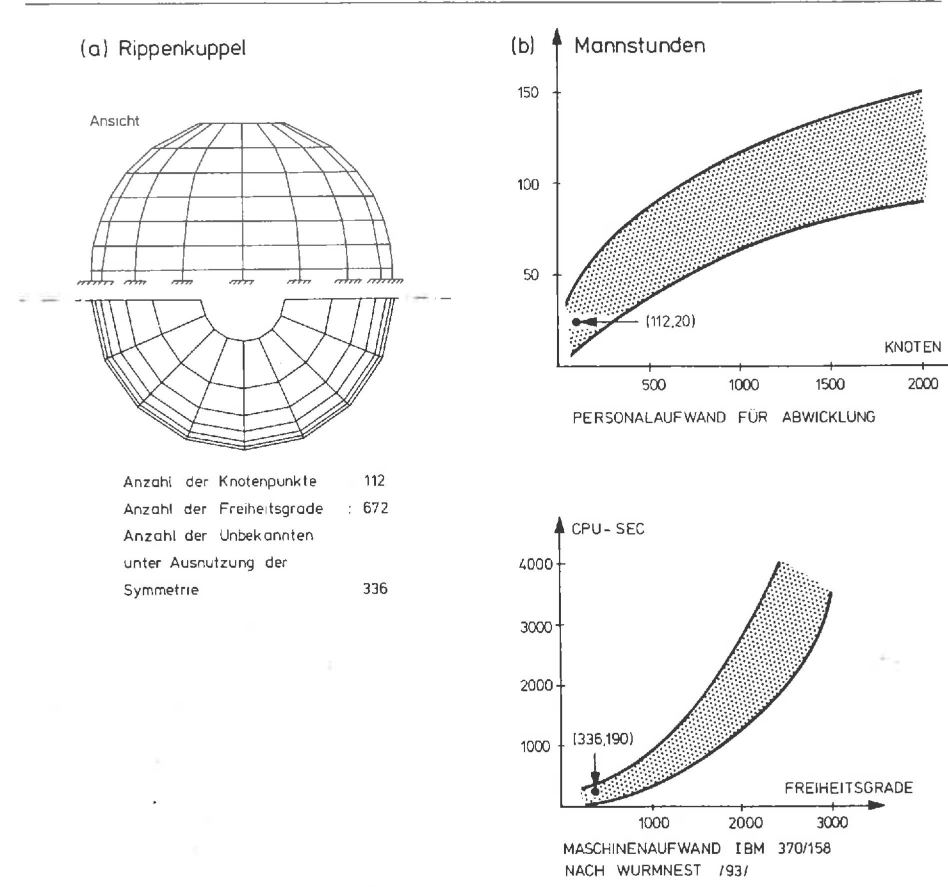


Bild 1.1 Rechenzeitbedarf und Personalaufwand bei der Lösung statischer Aufgaben mit Rechenanlagen

nur grob möglich. Für eine Iteration würde man unter günstigen Annahmen etwa 50 bis 70 Stunden Arbeitszeit benötigen und die Anzahl der erforderlichen Iterationen für jeden Lastfall wäre mit Sicherheit größer als 50.

1.2 Allgemeine Grundlagen und Zielsetzung

Aus den bisherigen Ausführungen wird deutlich, daß die *allgemeinen Grundlagen* einer "Matrizentheorie der Statik" sich

inhaltlich nicht von der "klassischen" Statik unterscheiden. Die Grundkenntnisse der Mechanik, wie sie üblicherweise in den Studiengängen der Ingenieurwissenschaften vermittelt werden, sind deshalb auch für das Verständnis der *Matrizenmethoden* unabdingbare Voraussetzungen; dasselbe gilt für die Grundkenntnisse der Mathematik.
Kenntnisse der Programmierung tragen an einigen Stellen zum besseren Verständnis von Flußdiagrammen bei und erleichtern die Bearbeitung der Übungsaufgaben wesentlich.

Die *Zielsetzung* der Matrizenmethoden ist eine systematische und problemorientierte Formulierung und Lösung baustatischer Aufgaben. Hierbei können viele spezielle Lösungsverfahren, die eine Abschätzung als Überprüfung der Richtigkeit umfangreicher Berechnungen ermöglichen, nicht behandelt werden. Dies darf nicht zu dem Fehlschluß führen, daß die Verfasser die Kenntnis dieser Verfahren für unnötig erachten. Überschlagsberechnungen sind auch im Zeitalter der dritten Generation von Computern noch genauso wichtig für die Dimensionierung von Tragwerken, wie sie es zu Zeiten des Rechenschiebers und der "Kurbelmaschine" waren. Wir setzen jedoch voraus, daß der Leser diese Verfahren aus den Einführungsveranstaltungen "Baustatik" kennt und bemühen uns, eine schwerpunktmäßige Verbindung mit den Matrizenmethoden herzustellen.

Durch die Ausführungen im vorhergehenden Abschnitt wird deutlich, daß die "Matrizentheorie" nicht nur viele Näherungsverfahren der Baustatik abgelöst hat, sondern zugleich auch den Anfang bildet für die "Methode der Finiten Elemente". An vielen Stellen haben wir deshalb die natürlichen Zusammenhänge herausgestellt, so daß beim Studium der Methode der Finiten Elemente darauf zurückgegriffen werden kann.
In Hinblick auf die praktische Anwendung haben wir den Stoffumfang so gewählt, daß ein gründliches Verständnis für

die heute üblichen Methoden der Baustatik vermittelt wird.

1.3 Allgemeine Annahmen

Die traditionelle Darstellung der Baustatik beginnt mit einer Beschränkung auf die lineare Statik deformierbarer Körper. *Wir behalten diese Betrachtungsweise bei und setzen voraus, daß*

> *die Verschiebungen aller Punkte eines Tragwerkes sowie die Relativverformungen (Verzerrungen und Dehnungen) aller Punkte so klein sind, daß wir alle auf das Tragwerk einwirkenden äußeren Kräfte und alle auf Teile des Tragwerkes einwirkenden inneren Kräfte am unverformten Tragwerk ansetzen können ("kleine Verformungen").*

Diese Voraussetzung gilt bis zu Kapitel 12.
Des weiteren gehen wir von den üblichen Annahmen der Balkentheorie aus, die wir hier zusammenfassend aufzählen:

- (a) die Stabwerke sind linear elastisch,
- (b) der Werkstoff ist homogen und isotrop,
- (c) die Stabachsen sind abschnittsweise gerade,
- (d) die geraden Stababschnitte besitzen konstanten Querschnitt,
- (e) die Querschnittsachsen sind Hauptachsen und die Stabachse liegt im Schubmittelpunkt des Querschnittes.

Die Annahmen (c) bis (e) beziehen sich nur auf die Einzelstäbe des Stabwerkes; eine Erweiterung für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt, für besondere Querschnittsformen und auch für die Berücksichtigung von Verwölbungseinflüssen (Wölbkrafttorsion) ist unter Berücksichtigung der relevanten Erweiterungen der Balkentheorie möglich /72/.

In den Kapiteln 12 und 13 verlassen wir die lineare Statik und geben eine Einführung in die Lösungsverfahren für Sta-

bilitätsprobleme und geometrisch nichtlineare Verformungsprobleme *ebener Stabwerke*.
Die Stabilitätsprobleme werden aus der linearisierten Differentialgleichung der Biegelinie abgeleitet. Dieselbe Linearisierung wird auch für die approximative Lösung der nichtlinearen Verformungsprobleme vorausgesetzt.
Die Beschränkung auf *ebene Stabwerke in den Kapiteln 12 und 13* erfolgt deshalb, weil eine Stabilitätsuntersuchung räumlicher Stabwerke ohne eine genauere Erfassung der Verwölbung nur von geringer praktischer Bedeutung wäre. Die Lösungsverfahren sind jedoch auch hier von allgemeiner Gültigkeit, und eine Erweiterung auf räumliche Stabwerke bedürfte nur einer Ergänzung durch räumliche Stabelemente mit genauerer Beschreibung des Torsionsverhaltens.
Bezüglich der äußeren, auf das Tragwerk einwirkenden Kräfte gehen wir von der üblichen Idealisierung aus, die unter dem Begriff "quasi-statische Belastung" zusammengefaßt wird:
Belastungsänderungen erfolgen so langsam, daß dadurch keine Trägheitskräfte entstehen.
Bewegliche Lasten, wie sie z.B. im Brückenbau auftreten, können - eventuell mit einem Lasterhöhungsfaktor multipliziert - wie quasi-statische Lasten betrachtet werden.

1.4 Hinweise zur Bearbeitung der Übungsaufgaben

Die Bearbeitung von Übungsaufgaben erscheint in der Baustatik unerläßlich zu sein; dies gilt für die klassischen Lösungsmethoden und für die Matrizenmethoden gleichermaßen. Während jedoch im erstgenannten Fall die heute allgemein verfügbaren Taschenrechner ausreichen, ist für die Lösung von Aufgaben mit den Matrizenmethoden eine programmierbare Rechenanlage mit mittelgroßem Speicher unbedingt erforderlich. Die Lösung von Problemen mit einer solchen Rechenanlage setzt Grundkenntnisse der Kommandosprache dieses Rech-

ners voraus und außerdem ein Benutzerprogramm, das die gewünschten Matrizenoperationen ausführt. Derartige Benutzerprogramme erfordern einen erheblichen Programmieraufwand, der den Rahmen einer Lehrveranstaltung in Baustatik weit übersteigen würde.

Die Übungsarbeiten können deshalb nur dann auf sinnvolle Weise gelöst werden, wenn ein solches Benutzerprogramm zur Verfügung steht. Benutzerprogramme sind heute leicht erhältlich und einfach zu handhaben.

Die Verfasser empfehlen für die Bearbeitung das Programm SMIS (Symbolic Matrix Interpretative System, /89/) oder die Weiterentwicklung MISS-SMIS /37/.

Für Anwendungen mit größerem Umfang wird auf Programmsysteme mit erweitertem Leistungsumfang verwiesen. Sie sind heute allgemein erhältlich (/31/,/6/) und gehören teilweise auch zur Grundausstattung von Rechenbüros, die baustatische Aufgaben lösen. Für diese Programmsysteme ist ein sorgfältiges Studium der Benutzerhandbücher erforderlich, das jedoch durch die Kenntnis der Matrizentheorie erheblich erleichtert wird.

2 Stabwerke – System und Elementeinteilung

Tragwerke werden entsprechend ihrer Tragwirkung in drei Klassen eingeteilt:

- Kontinua mit räumlicher Tragwirkung,
- Flächentragwerke mit flächenhafter Tragwirkung,
- Stabwerke mit linienhafter Tragwirkung.

Beispiele sind in Bild 2.1 dargestellt. In den folgenden Kapiteln wird nur die Berechnung von Stabwerken behandelt.

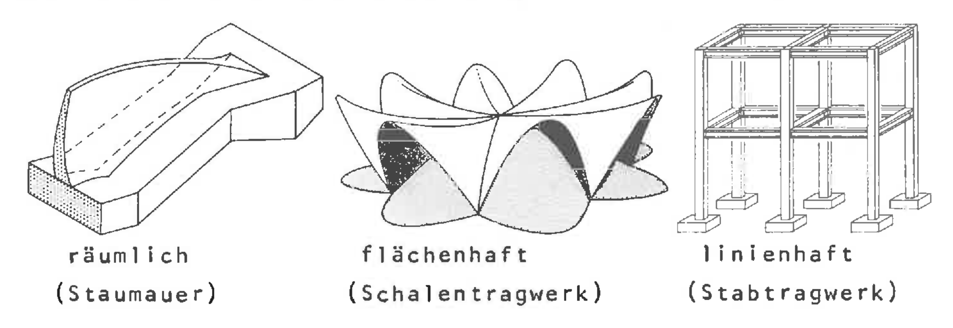
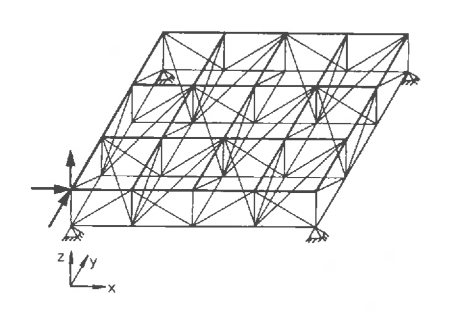


Bild 2.1 Beispiele zur Einteilung nach Tragwirkungen

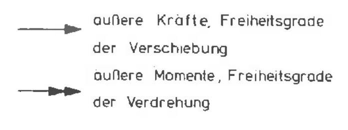
2.1 Aufbau und Tragwirkung der Stabwerke

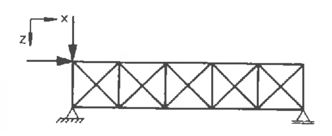
Die Elemente eines Stabwerkes sind gerade oder gekrümmte Stäbe. Jeder Stab besitzt zwei Stabenden, in welchen er mit anderen Stäben des Stabwerkes verknüpft werden kann. Die Stabendpunkte der Stäbe werden als Knoten bezeichnet. Die meisten in der Praxis ausgeführten Stabwerke können durch gerade Stäbe beschrieben werden. Aus diesem Grunde erfolgt hier eine Beschränkung auf Stabwerke mit geraden Stäben. Die Berechnung von Stabwerken, die nur in den Knoten durch Kräfte oder Momente belastet sind, läßt sich besonders einfach darstellen. Deshalb wird hier zunächst vorausgesetzt, daß das Stabwerk nur durch solche Einzelwirkungen in den Knoten belastet ist. Diese Einschränkung erfüllt die Erfordernisse der Praxis in vielen Fällen nicht; sie wird deshalb an späterer Stelle (Kapitel 7) wieder aufgehoben.

Stabwerke werden nach der Anordnung der Knoten, nach der Art der Belastung und nach der konstruktiven Ausbildung der Knoten in eine Vielzahl von Typen eingeteilt. Aufgrund der Anordnung der Knoten unterscheidet man *räumliche* und *ebene* Stabwerke (Bild 2.2).

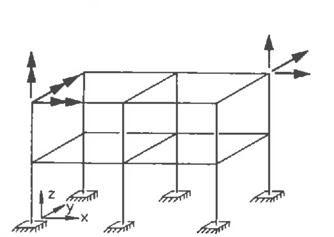


räumliches Fachwerk

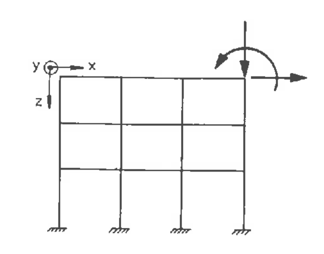




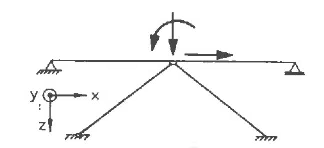
ebenes Fachwerk



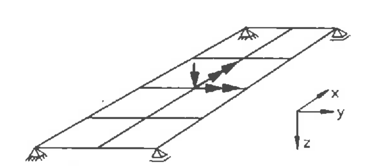
räumliches Stabtragwerk



ebenes Stabtragwerk



ebenes Stabtragwerk mit Gelenken



Trägerrost

Bild 2.2 Beispiele für Stabwerke

Bei *ebenen Stabtragwerken* wird davon ausgegangen, daß die Knoten in einer Ebene liegen und die äußeren Kräfte in derselben Ebene wirken. Äußere Momente bewirken bei ebenen

Stabtragwerken eine Verdrehung in derselben Ebene, der Momentenvektor steht jedoch senkrecht zu dieser Ebene. Stabtragwerke, deren Knotenpunkte in einer Ebene liegen und die durch Kräfte senkrecht zu dieser Ebene belastet werden, bezeichnet man als *Trägerroste*. In der Ebene des Trägerrostes können in jedem Knotenpunkt zusätzlich zwei linear unabhängige Momentenvektoren als Belastung vorgegeben sein. Stabwerke mit frei drehbaren Knoten (ideale Gelenke) bezeichnet man als Fachwerke und unterscheidet zwischen *räumlichen Fachwerken* (Fachwerke im Raum) und *ebenen Fachwerken* (Fachwerke in der Ebene). Die Knoten von Fachwerken können nur durch Kräfte belastet werden.

Für die Darstellung der konstruktiven Ausbildung von Gelenkknoten mit Kräftezwischenbedingungen verwendet man in der Ebene eine sinnvolle Symbolik (Bild 2.3).

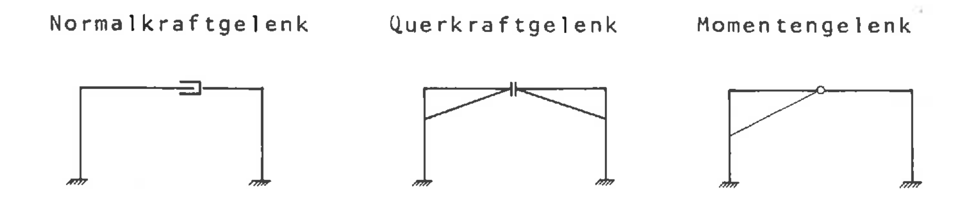


Bild 2.3 Gelenke in der Ebene

Stabwerke müssen über einen oder mehrere Knotenpunkte mit dem als starr betrachteten Baugrund verbunden werden. In diesen Lagerpunkten werden einzelne Verschiebungen oder Verdrehungen vorgegeben, und in den Richtungen der vorgegebenen Verformungen wirken Kräfte, die sogenannten Lagerreaktionen, auf den Baugrund. Für die Darstellung der Lagerung in der Ebene wählt man eine sinnvolle Symbolik (Bild 2.4). Bei einer Lagerung über elastische *Federn* werden die Federn als spezielle Elemente des Stabwerks betrachtet. Man unterscheidet zwischen *Dreh- und Senkfedern* und bezeichnet sie als Federelemente.

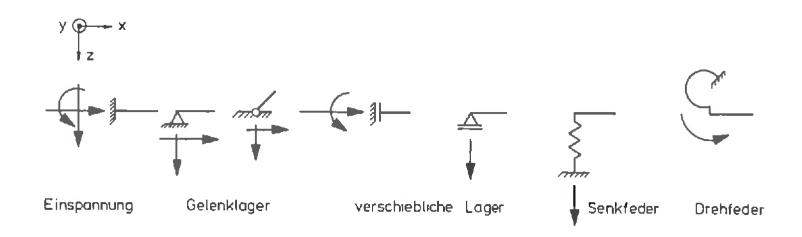


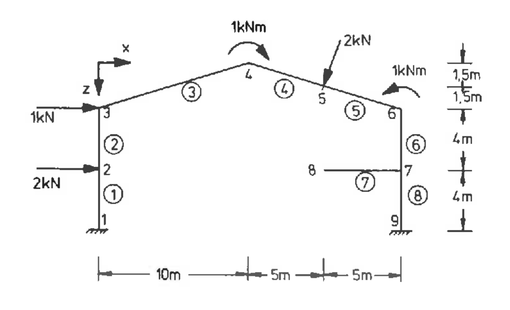
Bild 2.4 Symbolische Darstellung von Lagern in der Ebene mit positiv wirkenden Lagerreaktionen

2.2 Koordinaten der Knotenpunkte und Verknüpfung der Elemente

Wir beschreiben jedes Stabwerk in einem rechtsdrehenden, kartesischen Koordinatensystem. Der Ursprung des Koordinatensystems wird willkürlich festgelegt (Bild 2.2). Die Koordinaten der Knotenpunkte werden aus den Abmessungen des Stabwerkes berechnet. Man bezeichnet das Koordinatensystem als *globales Koordinatensystem* mit den Achsen x, y und z.
Die Elemente des Stabwerkes werden in einem rechtsdrehenden, kartesischen Koordinatensystem beschrieben, dem *lokalen Koordinatensystem* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Jedes Element hat ein elementbezogenes lokales Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in einem der Stabenden. Die $\bar{x}$-Achse fällt mit der Stabachse zusammen, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ sind die Hauptachsen der Flächenträgheitsmomente der Stabquerschnitte.
Das Stabelement in lokalen Koordinaten ist die Grundlage der systematischen Berechnung; es kann bausteinartig zu dem zu berechnenden Stabwerk zusammengefügt werden, die Eigenschaften der Einzelelemente können katalogartig beschrieben werden (Anhang A3). Die einzelnen Elemente werden über Koordinatentransformationen zum Gesamtsystem verknüpft.
In der üblichen praktischen Anwendung steht jedoch das Gesamtsystem mit seinen vorgegebenen Abmessungen und Werkstoffangaben am Anfang der Berechnung. Ausgehend hiervon

erfolgt als erster Schritt eine Einteilung in Elemente und Knoten. Die Elemente und Knoten werden fortlaufend von 1 beginnend numeriert. Die Knotenpunkte werden durch die Koordinaten in einem frei gewählten, globalen Koordinatensystem beschrieben. In der *Koordinatentafel* ordnet man den Knotennummern in aufsteigender Folge ihre Koordinaten x, y, z zu. Die Verknüpfungsdaten der Elemente werden in einer *Verknüpfungstafel* (Inzidenztafel) aufgestellt: Den Elementnummern werden in aufsteigender Folge die beiden Nummern der Knotenpunkte des betrachteten Elementes zugeordnet. Der Knoten mit der kleineren Knotennummer wird als "linker" Knoten bezeichnet. Der Koordinatenursprung des lokalen Koordinatensystems $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ wird in den linken Knoten gelegt. Damit erhalten alle Elemente eine Orientierung von links (ℓ) nach rechts (r). In der Darstellung werden die Elementnummern durch Kreise von den Knotennummern unterschieden.

Beispiel 2.1:
Für das in Bild 2.5 dargestellte ebene Stabtragwerk werden die Koordinatentafel und die Verknüpfungstafel aufgestellt.



Knoten	x [m]	z [m]
1	0	11
2	0	7
3	0	3
4	10	0
5	15	1,5
6	20	3
7	20	7
8	15	7
9	20	11

Koordinatentafel

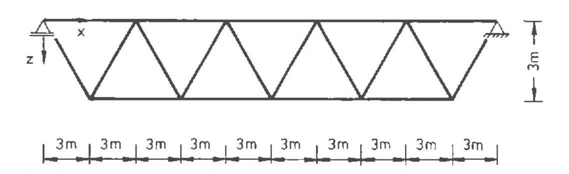
Element	Knoten ℓ	r
①	1	2
②	2	3
③	3	4
④	4	5
⑤	5	6
⑥	6	7
⑦	7	8
⑧	7	9

Verknüpfungstafel

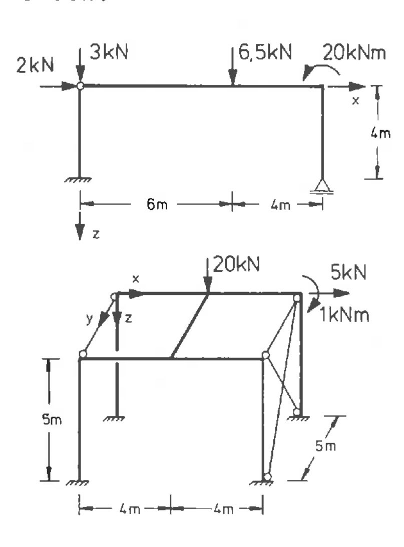
Bild 2.5 Ebenes Stabtragwerk mit Koordinaten- und Verknüpfungstafel

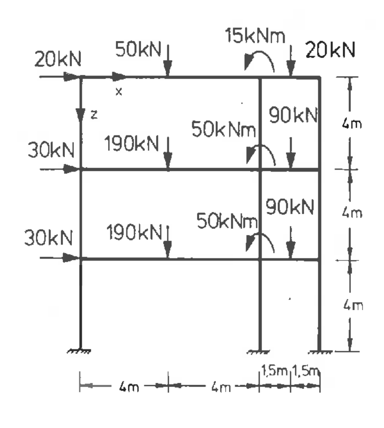
Aufgaben:

2.1 Für das dargestellte Fachwerk ist eine Numerierung der Knoten und Elemente vorzunehmen. Für das festgelegte globale Koordinatensystem sollen die Koordinatentafel und die Verknüpfungstafel aufgestellt werden.



2.2 Für die dargestellten Stabtragwerke ist eine sinnvolle Numerierung der Knoten und Elemente festzulegen. Koordinatentafel und Verknüpfungstafel sollen aufgestellt werden.





3 Stabelemente als starre Körper

Ausgehend von einem differentiellen Element werden Gleichgewichtsaussagen für einzelne Elementtypen aufgestellt. Es gibt nur wenige verschiedene Elementtypen, aus denen alle Stabwerke aufgebaut werden können. Die Reduktion auf diese Elemente bietet den Vorteil, daß alle Tragwerke, unabhängig von der Tragwerksform, einheitlich berechnet werden können.

3.1 Die Differentialgleichungen des Balkens

Unter der Annahme, daß die Formänderungen eines Körpers bei einer vorhandenen Belastung klein bleiben, können Schnittgrößen, Lasten und Lagerreaktionen am unverformten Körper angesetzt werden, (siehe Annahme Kapitel 1).

Definition 3.1: *Schnittgrößen sind die inneren Kraftgrößen in einem Schnitt durch das Tragwerk. Schnittgrößen sind die Resultierenden der Spannungen.*

Aus der Mechanik /39/ sind die Differentialgleichungen des Balkens bekannt. Für ein räumliches Stabelement von der Länge $d\bar{x}$ gelten für verteilte Belastungen (Bild 3.1) folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{dN(\bar{x})}{d\bar{x}} = -n(\bar{x}) \; , \quad \frac{dQ_y(\bar{x})}{d\bar{x}} = -q_y(\bar{x}) \; , \quad \frac{dQ_z(\bar{x})}{d\bar{x}} = -q_z(\bar{x}) \; ,$$

$$\frac{dM_x(\bar{x})}{d\bar{x}} = -m_x(\bar{x}) \; , \quad \frac{dM_y(\bar{x})}{d\bar{x}} = Q_z(\bar{x}) - m_y(\bar{x}) \; ,$$

$$\frac{dM_z(\bar{x})}{d\bar{x}} = -Q_y(\bar{x}) - m_z(\bar{x}) \; , \qquad (3.1)$$

$$\frac{d^2M_y(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = -q_z(\bar{x}) - \frac{dm_y(\bar{x})}{d\bar{x}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2M_z(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = q_y(\bar{x}) - \frac{dm_z(\bar{x})}{d\bar{x}} \; .$$

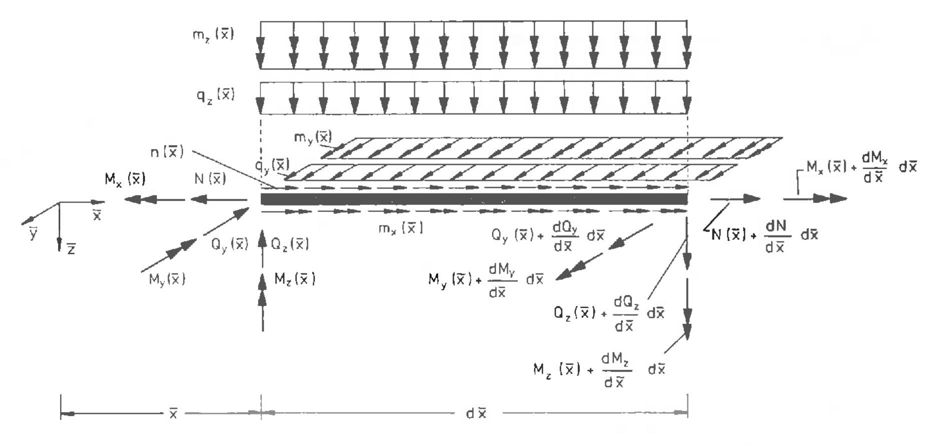


Bild 3.1 Differentielles Balkenelement

Hierbei ist $N(\bar{x})$ die Normalkraft, $Q_y(\bar{x})$ und $Q_z(\bar{x})$ sind die Querkräfte, $M_x(\bar{x})$ ist das Drill- oder Torsionsmoment und $M_y(\bar{x})$ und $M_z(\bar{x})$ sind die Biegemomente.
Durch Integration erhält man die Schnittgrößen als Funktionen der Bezugsachsenkoordinate $\bar{x}$.
Im folgenden sollen nun die Schnittgrößen für verschiedene *belastungsfreie Stabelemente* mit ihren Gleichgewichtsbeziehungen dargestellt werden.

3.2 Schnittgrößen unbelasteter Elemente

Die Schnittgrößen eines Tragwerks werden in den lokalen Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ eines jeden Elementes angegeben. Schnittgrößen wirken immer auf einer Bezugsachse, die Schwerachse, Hauptachse oder Schubmittelpunktsachse ist. Für die Bemessung werden nicht die Schnittgrößen, sondern Spannungen verwendet. Für den Verlauf der Spannungen werden Annahmen getroffen /39/.
Die Schnittgrößen eines räumlichen *Stabelementes* (TYP 1) sind $N(\bar{x})$, $Q_y(\bar{x})$, $Q_z(\bar{x})$, $M_x(\bar{x})$, $M_y(\bar{x})$ und $M_z(\bar{x})$ (Bild 3.2).
Die Schnittgrößen eines ebenen *Stabelementes* (TYP 2) sind $N(\bar{x})$, $Q_z(\bar{x}) \equiv Q(\bar{x})$ und $M_y(\bar{x}) \equiv M(\bar{x})$ (Bild 3.3).

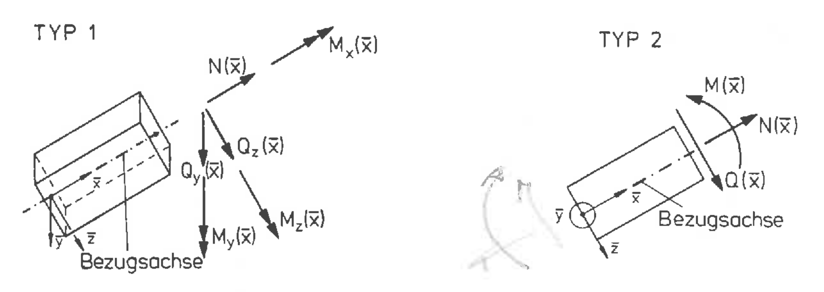


Bild 3.2 Stabelement (räuml.) Bild 3.3 Stabelement (eben)

Die Schnittgrößen eines *Trägerrostelementes* (TYP 3) sind $Q_z(\overline{x})$, $M_x(\overline{x})$ und $M_y(\overline{x})$ (Bild 3.4).
Die Schnittgröße eines *ebenen Fachwerkelementes* (TYP 4) oder eines *räumlichen Fachwerkelementes* (TYP 5) ist $N(\overline{x})$ (Bild 3.5).

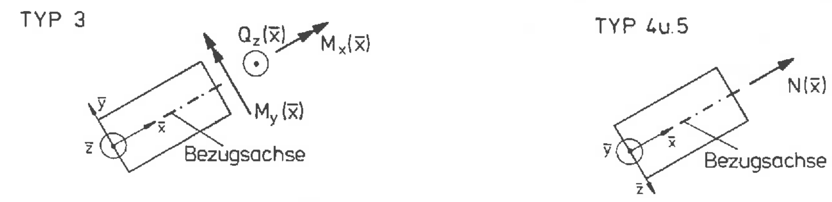


Bild 3.4 Trägerrostelement Bild 3.5 Fachwerkelement

Für ein *räumliches Stabelement ohne Belastung* erhält man durch Integration der Gleichungen (3.1) folgende Schnittgrößenfunktionen:

$$N(\overline{x}) = C_1 \,, \quad Q_y(\overline{x}) = C_2 \,, \quad Q_z(\overline{x}) = C_3 \,,$$
$$M_x(\overline{x}) = C_4 \,, \quad M_y(\overline{x}) = C_3\overline{x} + C_5 \text{ und } M_z(\overline{x}) = -C_2\overline{x} + C_6 \,. \qquad (3.2)$$

Durch Randbedingungen müssen die sechs Integrationskonstanten $C_1, C_2, \ldots, C_6$ bestimmt werden. Somit sind in jedem unbelasteten Element die Normalkraft, die Querkräfte und das Drillmoment konstant. Die Biegemomente haben einen linearen Verlauf.
Für die anderen Stabelemente gelten entsprechende Schnittgrößenfunktionen.

3.3 Stabendkräfte

Die Integrationskonstanten in Gleichung (3.2) sind für ein statisch bestimmt gelagertes Stabelement gleichbedeutend mit *linear unabhängigen Stabendkräften.*

Definition 3.2: *Stabendkräfte sind die positiven Schnittgrößen am positiven Schnittufer (rechter Knoten) und die negativen Schnittgrößen am negativen Schnittufer (linker Knoten).*

Die *Stabendkräfte* werden im Vektor $\underline{\bar{S}}^i$ für das Element (i) zusammengefaßt. Die *linear unabhängigen Stabendkräfte* werden in dem Vektor $\underline{F}^i$ zusammengefaßt. Die Anzahl von Stabendkräften und linear unabhängigen Stabendkräften ist für die verschiedenen Elementtypen (TYP 1 bis TYP 5) in Tafel 3.1 zusammengestellt.

TYP	Komponenten in $\underline{\bar{S}}^i$	$\underline{F}^i$
1	12	6
2	6	3
3	6	3
4	4	1
5	6	1

Tafel 3.1

Gelenke können einmal, wie in Kapitel 2 gezeigt, in Knotenpunkten des Tragwerks sein. Sind an einem Gelenk jedoch nur zwei Elemente verknüpft und stimmen bei diesen Elementen die Stabachsen auch noch überein, so können diese beiden Elemente zu einem Element vereinigt werden. Bei solchen Elementen mit Gelenken im Innern reduziert sich die Anzahl der linear unabhängigen Stabendkräfte um die Anzahl der Gelenkbedingungen. Die Anzahl der Stabendkräfte bleibt jedoch konstant.

Mit Gleichung (3.2) können die Gleichgewichtsbedingungen am Element ⓘ aufgestellt werden:

$$\underline{\bar{S}}^i = \underline{T}^i \, \underline{F}^i \quad . \tag{3.3}$$

$\underline{T}^i$ ist die Kräftetransformationsmatrix des Elements ⓘ. Im folgenden sind die Berechnungen der Elemente von $\underline{T}^i$ am Beispiel eines ebenen Stabelementes gezeigt.

Beispiel 3.1:

Ein ebenes Stabelement hat die drei Schnittgrößen N, Q und M. In Gleichung (3.2) müssen deshalb die Konstanten C_1, C_3 und C_5 bestimmt werden. Der Vektor der linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}^i$ besitzt drei, der Vektor der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ sechs Komponenten. Ein ebenes Stabelement kann auf unterschiedliche Art und Weise statisch bestimmt gelagert werden.

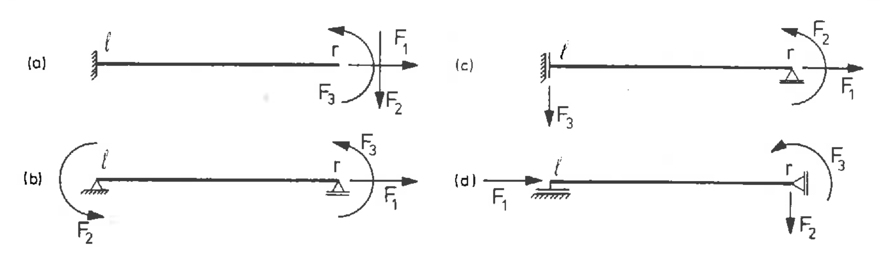


Bild 3.6 Statisch bestimmte Lagerung

Die Lagerung eines Elementes ist dann statisch bestimmt, wenn das Element unverschieblich gelagert ist, und die Schnittgrößen allein mit den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können.

Eine Auswahl von Lagerungsarten mit den zugehörigen linear unabhängigen Stabendkräften ist in Bild 3.6 dargestellt. Linkes und rechtes Stabende können vertauscht werden; daraus ergeben sich weitere Möglichkeiten. Bei jeder Lagerung sind drei linear unabhängige Stabendkräfte und drei Lagerreaktionen vorhanden. Wir wählen die Lagerungsart (b) (Bild 3.6).

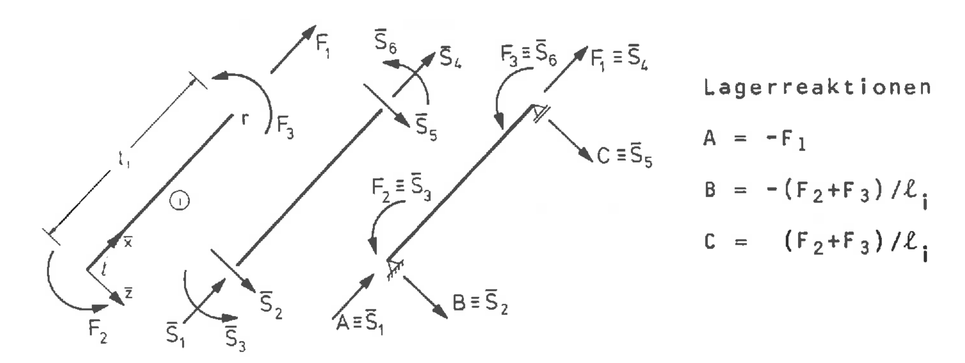


Bild 3.7 Kräftetransformation eines ebenen Stabelementes

Die Lagerreaktionen werden aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet (Bild 3.7) und bestimmen den vollständigen Vektor der Stabendkräfte $\underline{S}$. Damit ergibt sich als Kräftetransformation für das ebene Stabelement (In Matrizen wird prinzipiell ℓ anstelle von ℓ_i verwendet.):

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \hline \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\ell & 1/\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Die Berechnung der Kräftetransformationsmatrizen für andere Stabelemente erfolgt analog. Die Ergebnisse sind im Anhang A3 zusammengestellt.

3.4 Drehungsmatrizen und Gleichgewicht in globalen Koordinaten

Ein Stabelement ist Teil eines Stabtragwerkes (Bild 3.8), welches in einem globalen Koordinatensystem beschrieben wird.

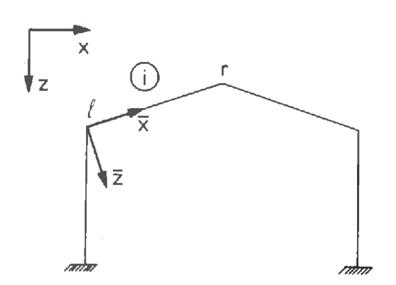


Bild 3.8 Lokale und globale Koordinaten

Um die einzelnen Elemente des Tragwerks verknüpfen zu können, müssen die Stabendkräfte im globalen Koordinatensystem dargestellt werden. Man erhält eine Koordinatendrehung der Form:

$$\underline{L}_D^{\,i}\ \underline{\bar{S}}^i = \underline{S}^i \ . \tag{3.4}$$

$\underline{L}_D^{\,i}$ ist die Drehungsmatrix des Elementes (i), $\underline{S}^i$ sind die Stabendkräfte im globalen Koordinatensystem.
Da die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ mit den lokalen Koordinatenachsen gleichgerichtet sind, ist die Transformation der Stabendkräfte nach (3.4) mit der Drehung des lokalen in das globale Koordinatensystem identisch (Bild 3.9).
Drehungsmatrizen haben die besondere Eigenschaft, daß die Transponierte gleich der Inversen ist (Anhang A1):

$$(\underline{L}_D^{\,i})^T = (\underline{L}_D^{\,i})^{-1} \ .$$

Damit gilt für die Drehung vom globalen ins lokale Koordinatensystem:

$$\underline{\bar{S}}^i = (\underline{L}_D^{\,i})^T\ \underline{S}^i \ . \tag{3.5}$$

Für ein räumliches Stabelement ist $\underline{L}_D^{\,i}$ aus vier Teilmatrizen aufgebaut, die in Diagonalform angeordnet sind (Hyperdiagonalmatrix). Die Matrizenelemente der Diagonale sind die bekannten Transformationsmatrizen der Koordinatendre-

hung (siehe z.B. /4/):

$$\underline{L}_D{}^i = \begin{bmatrix} \underline{L}^i & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}^i & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}^i & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}^i \end{bmatrix} \quad \text{mit } \underline{L}^i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{11} & \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{31} \\ \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{22} & \cos\alpha_{32} \\ \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

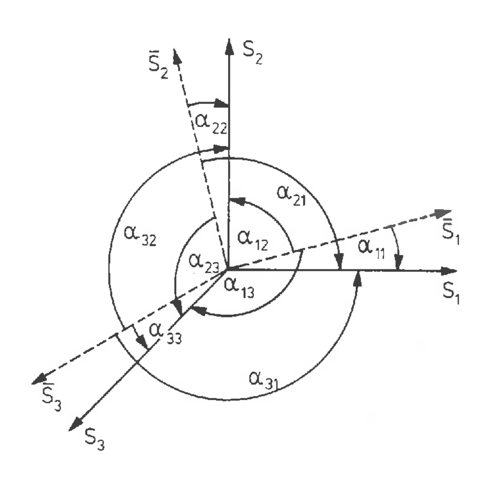


Bild 3.9 Räumliche Koordinatendrehung

Die Winkel α_{ij} sind in Bild 3.9 dargestellt. Üblicherweise sind die Richtungswinkel α_{ij} nicht bekannt. Sie müssen aus den Koordinaten der Stabelemente in einem globalen Koordinatensystem berechnet werden.

Die Berechnung der Richtungswinkel ist im folgenden dargestellt. Es wird angenommen, daß die Lage der $(\bar{x},\bar{z})$-Ebene des lokalen Koordinatensystems bekannt ist und zwar durch die Koordinaten von drei Punkten (Bild 3.10):

$$\ell(x_\ell, y_\ell, z_\ell) \quad , \quad r(x_r, y_r, z_r) \quad \text{und} \quad c(x_c, y_c, z_c) \ .$$

Mit den Koordinaten der drei Punkte ℓ, r und c lassen sich die Kosinuswerte in Gleichung (3.6) berechnen.

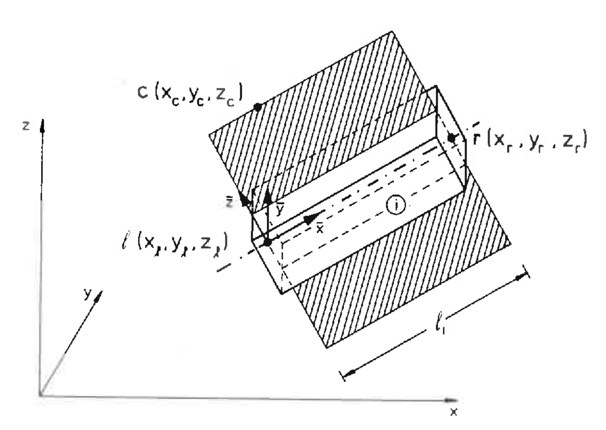


Bild 3.10 Koordinaten im Raum

Hierzu werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\ell_i = \sqrt{(x_r - x_\ell)^2 + (y_r - y_\ell)^2 + (z_r - z_\ell)^2} \,,$$

$$q = (x_r - x_c)(x_r - x_\ell) + (y_r - y_c)(y_r - y_\ell) + (z_r - z_c)(z_r - z_\ell) \,,$$

$$u_1 = q(x_r - x_\ell) + \ell_i^2(x_c - x_r) \,, \quad u_2 = q(y_r - y_\ell) + \ell_i^2(y_c - y_r) \,,$$

$$u_3 = q(z_r - z_\ell) + \ell_i^2(z_c - z_r) \,, \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \,.$$

Damit ergibt sich ($c_{ij} = \cos\alpha_{ij}$):

$$c_{11} = (x_r - x_\ell)/\ell_i \,, \quad c_{31} = u_1/u \,, \quad c_{21} = c_{13}c_{32} - c_{12}c_{33} \,,$$

$$c_{12} = (y_r - y_\ell)/\ell_i \,, \quad c_{32} = u_2/u \,, \quad c_{22} = c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} \,,$$

$$c_{13} = (z_r - z_\ell)/\ell_i \,, \quad c_{33} = u_3/u \,, \quad c_{23} = c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32} \,.$$

Für ein ebenes Stabelement erhält die Drehungsmatrix eine einfachere Form. Die Kräftetransformation erfolgt in der (x,z)-Ebene (Bild 3.11). Das Biegemoment als Vektor senkrecht zu dieser Ebene ist drehungsinvariant. Es gilt mit

$$\cos\alpha_{11} = \cos\alpha_{22} = (x_r - x_\ell)/\ell_i = \cos\alpha \,,$$

$$\cos \alpha_{12} = -\cos \alpha_{21} = (z_r - z_\ell)/\ell_i = \sin \alpha$$

und $\ell_i = \sqrt{(x_r - x_\ell)^2 + (z_r - z_\ell)^2}$:

$$\underline{L}_D{}^i = \begin{bmatrix} \underline{L}^i & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & 1 & \underline{0} & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}^i & \underline{0} \\ \underline{0} & 0 & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{L}^i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

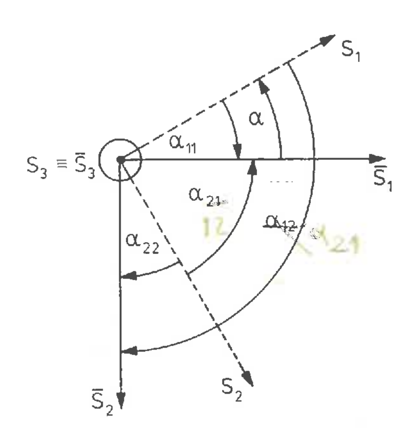


Bild 3.11 Ebene Koordinatendrehung

Die Drehungsmatrizen der übrigen Elemente erhält man analog. Die Ergebnisse sind im Anhang A3 zusammengestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen (3.3) können mit (3.4) im globalen Koordinatensystem dargestellt werden:

$$\underline{L}_D{}^i \, \underline{T}^i \, \underline{F}^i = \underline{S}^i \, . \qquad (3.8)$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir

$$\underline{a}^i = (\underline{L}_D{}^i \, \underline{T}^i)^T$$

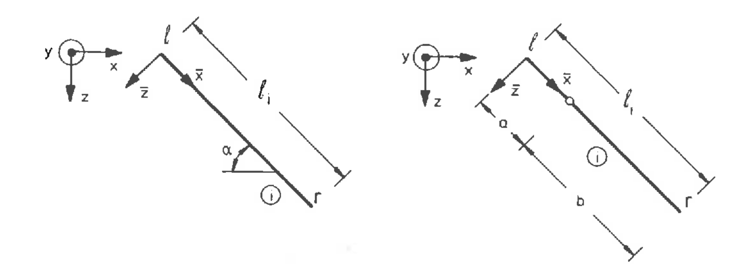
und erhalten damit für (3.8):

$$(\underline{a}^i)^T \, \underline{F}^i = \underline{S}^i \, . \qquad (3.9)$$

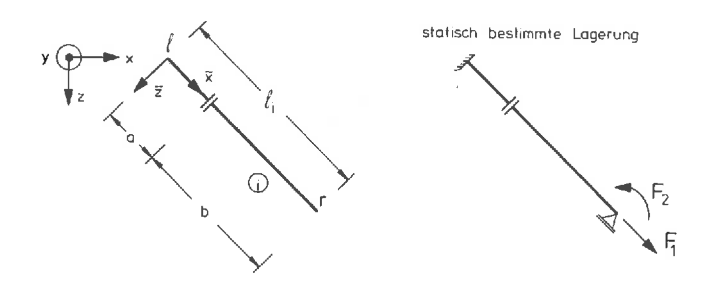
$(\underline{a}^i)^T$ wird als Gleichgewichtsmatrix des Elementes in globalen Koordinaten bezeichnet. Die Transponierte wird aus formalen Gründen eingeführt. Eine Zusammenfassung für die hier betrachteten Elemente ist im Anhang A3 angegeben.

Aufgaben:

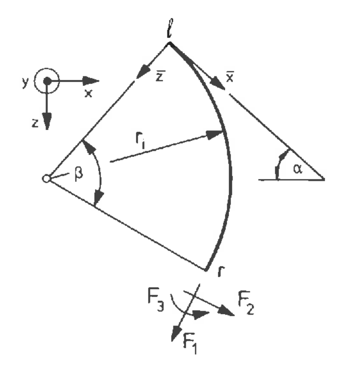
3.1 Für ein ebenes Fachwerkelement und ein ebenes Stabelement mit Momentengelenk sind die statisch bestimmte Lagerung und die Transformationsmatrizen $\underline{T}^i$, $\underline{L}_D{}^i$ und $(\underline{a}^i)^T$ herzuleiten. Die Ergebnisse sind mit Anhang A3 zu vergleichen.



3.2 Für das Stabelement mit Querkraftgelenk im Innern leite man die Matrizen $\underline{T}^i$, $\underline{L}_D{}^i$ und $(\underline{a}^i)^T$ her. Eine mögliche, statisch bestimmte Lagerung ist angegeben.



3.3 Man leite sich die Transformationsmatrizen für ein ebenes Kreiselement her. Als statisch bestimmte Lagerung nehme man eine Einspannung am linken Elementende an.



4 Gleichgewicht von Stabwerken

Durch die Festlegung auf die grundlegenden Elementtypen in Kapitel 3 ist der Weg zur Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen vorgezeichnet. Wir betrachten nur Stabwerke, die aus diesen Elementen aufgebaut sind und treffen zunächst restriktive Vereinbarungen bezüglich der Lagerung. Das Prinzip der Berechnung läßt sich damit einfach darstellen. Anschließend, und darauf aufbauend, werden die vielfältigen Möglichkeiten der Lagerung und der Berücksichtigung von Gelenken aller Art behandelt.

4.1 Grundlagen

Eine wesentliche Grundlage ist das bei der Herleitung der Elementgleichgewichtsbeziehungen verwendete Schnittprinzip: Wir denken uns die einzelnen Elemente des Stabwerks herausgeschnitten. Für die Wechselwirkung zwischen Element und Knoten gilt das *Gegenwirkungsprinzip*: actio = reactio; die Stabendkräfte in einem durch einen Schnitt freigelegten Stabende sind den auf den Knoten wirkenden Kräften entgegengerichtet und dem Betrage nach gleich groß (Bild 4.1).

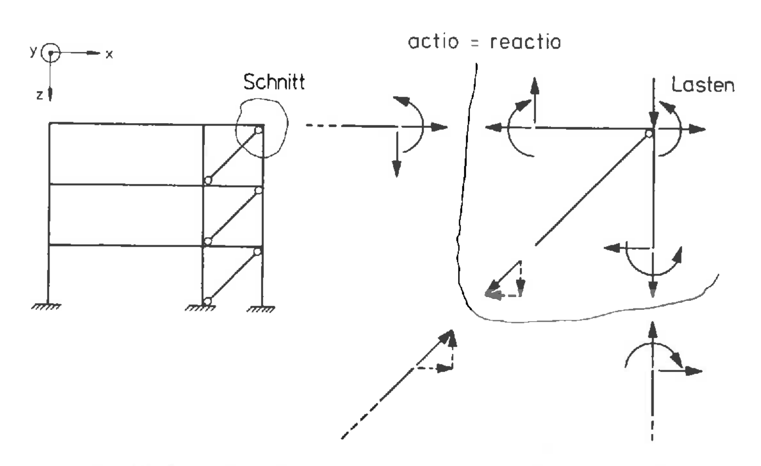


Bild 4.1 Erläuterung zum Schnittprinzip

Für ein Tragwerk gelten zusammengefaßt folgende Gleichgewichtsaussagen:

Satz 4.1: *Ein Stabwerk ist nur dann im Gleichgewicht, wenn*
(a) die Lasten mit den Lagerreaktionen im Gleichgewicht sind,
(b) jedes Stabelement im Gleichgewicht ist und
(c) an allen Knoten, die man sich durch Knotenschnitte freigelegt denkt, Gleichgewicht zwischen den Knotenlasten und den Knotenkräften herrscht.

Die *Knotenkräfte* im Knoten i sind die Summe der Stabendkräfte (reactio) aller am Knoten i angeschlossenen Stabelemente.

4.2 Unverschiebliche Lager

Mit Bezug auf die Randbedingungen der Verschiebung bezeichnen wir ein Stabwerk als Stabwerk mit unverschieblichen Lagern, wenn
(a) alle Starrkörperverschiebungen durch Lager verhindert werden und
(b) in den Lagern alle möglichen Verformungen der angeschlossenen Elemente Null sind. Dies ist gleichbedeutend mit biegestarrer, unverschieblicher Lagerung für Stabtragwerke und Trägerroste und mit unverschieblicher Lagerung für Fachwerke (Bild 4.2).

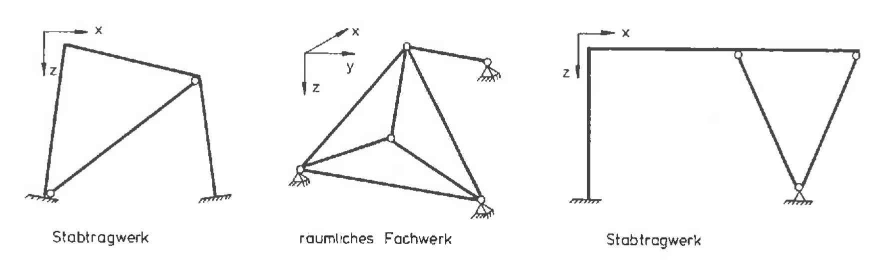


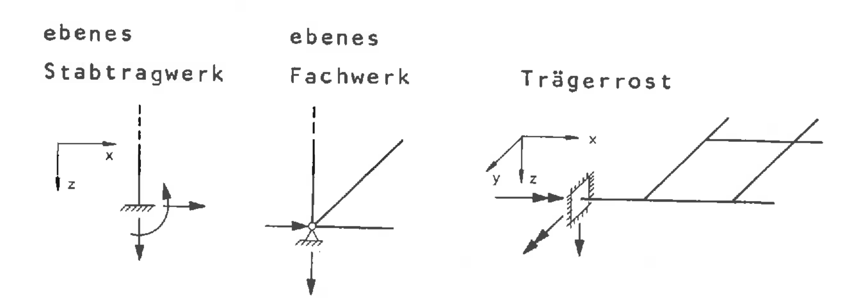
Bild 4.2 Unverschiebliche Lager

Alle Knoten eines Stabwerkes können durch äußere Kräfte beansprucht werden:

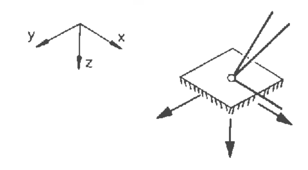
- die inneren Knoten durch die Belastung,
- die Randknoten durch die Lagerreaktionen.

Lagerreaktionen werden also zu den äußeren Kräften gezählt (Bild 4.3).

Definition 4.1: *Lagerreaktionen sind positiv in Richtung der positiven Achsen des globalen Koordinatensystems.*



räumliches Fachwerk



räumliches Stabtragwerk

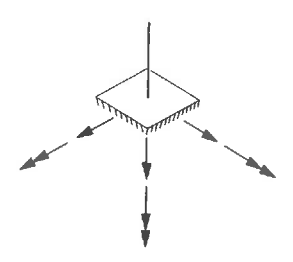


Bild 4.3 Positive Lagerreaktionen unverschieblicher Lager

Lagerreaktionen sind damit unbekannte äußere Kräfte in den Randknoten. Sie werden hier über Verschiebungen eingeführt.

Definition 4.2: *In allen Punkten des Tragwerks, in denen die Verschiebungen vorgegeben sind, sind die äußeren Kräfte unbekannt. In allen Punkten, in welchen die Verschiebungen*

unbehindert sind, können äußere Kräfte, die Knotenlasten, vorgegeben werden.
In Punkten des Tragwerks, in denen die Verschiebungen vorgegeben sind, können sich die äußeren Kräfte entsprechend den Gleichgewichtsbedingungen frei einstellen.

4.3 Das Gleichgewicht bei unverschieblichen Lagern

Die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems werden über die Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knoten aufgestellt. Aus Gründen der Einheitlichkeit der Darstellung sind vorläufig einige *Vereinbarungen* zweckmäßig:
Knoten werden von 1 beginnend fortlaufend so numeriert, daß die Randknoten (Lager) die größten Knotennummern erhalten. Die in Kapitel 2 eingeführte Elementnumerierung wird davon nicht betroffen. Knotenlasten an einem inneren Knoten k werden mit $\underline{R}^k$ bezeichnet. Die Lagerreaktionen an einem Randknoten k werden mit $\underline{\bar{R}}^k$ bezeichnet. Jedem Knoten k wird eine Dimensionszahl zugeordnet.

Definition 4.3: *Die Dimensionszahl d_k eines Knotens k ist die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten des Knotenkraftvektors $\underline{R}^k$ bzw. von $\underline{\bar{R}}^k$, wenn es sich um einen Randknoten handelt (Bild 4.3).*

Bei einem ebenen (räumlichen) Stabtragwerk hat jeder Knoten die Dimensionszahl 3 (6). Bei einem ebenen (räumlichen) Fachwerk hat jeder Knoten die Dimensionszahl 2 (3).
Analog wird die Dimensionszahl d_i eines Elementes als Anzahl der Komponenten von $\underline{\bar{S}}^i$ des Elementes (i) definiert (siehe Tafel 3.1).
Nach Satz 4.1 (c) muß an jedem Knoten Gleichgewicht zwischen den Knotenlasten und den Knotenkräften herrschen. Dies ergibt für jeden Knoten k ein System von d_k linearen Gleichungen.

Als Beispiel sind diese Gleichungen für den Knoten eines ebenen Stabwerkes, in dem Stabelemente und ein Fachwerkelement anschließen, in Bild 4.4 aufgenommen.

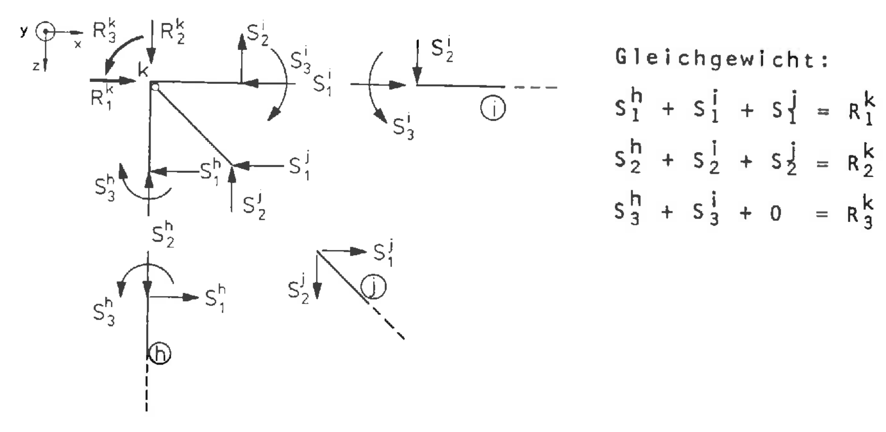


Bild 4.4 Gleichgewicht am Knoten

Für das Gesamtsystem mit p Knoten stehen

$$n' = \sum_{k=1}^{p} d_k \tag{4.1}$$

lineare Gleichungen in den Stabendkräften zur Verfügung. Wir zeigen nun einen zweckmäßigen Weg zur Aufstellung dieser Gleichgewichtsbedingungen.

Der Knotennumerierung folgend, werden alle Komponenten der Knotenlasten in einem Knotenlastenvektor $\underline{R}'$ zusammengefaßt:

$$\underline{R}' = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_{n'} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \text{innere Knoten} \\ \\ \} \text{Lager} \end{matrix} \tag{4.2}$$

Der Elementnumerierung folgend werden alle Komponenten der Stabendkräfte in einem Stabkraftvektor $\underline{S}$ zusammengefaßt; für q Elemente erhält man:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{m'} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \underline{S}^1 \\ \underline{S}^2 \\ \vdots \\ \underline{S}^q \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

mit $m' = \sum_{i=1}^{q} d_i'$, der Dimension von $\underline{S}$.

Die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems können damit dargestellt werden zu

$$\underline{C}' \ \underline{S} = \underline{R}' \tag{4.4}$$

mit $\underline{C}'_{n' \times m'}$.

Die Komponenten von $\underline{C}'$ erhält man zeilenweise wie folgt:

$C'_{ij} = 1$, wenn S_j einen Beitrag zu dem Gleichgewicht in Richtung von R_i' leistet;

$C'_{ij} = 0$, wenn S_j am Gleichgewicht in Richtung von R_i' nicht beteiligt ist.

$\underline{C}'$ ist eine (0,1)-Matrix; wir bezeichnen sie als *Verknüpfungs- oder Inzidenzmatrix* des Stabwerkes. Die systematische Besetzung von $\underline{C}'$ erfolgt ausgehend von der Verknüpfungstafel (Kapitel 2).
Gleichung (4.4) ist in Bild 4.5 symbolisch dargestellt.

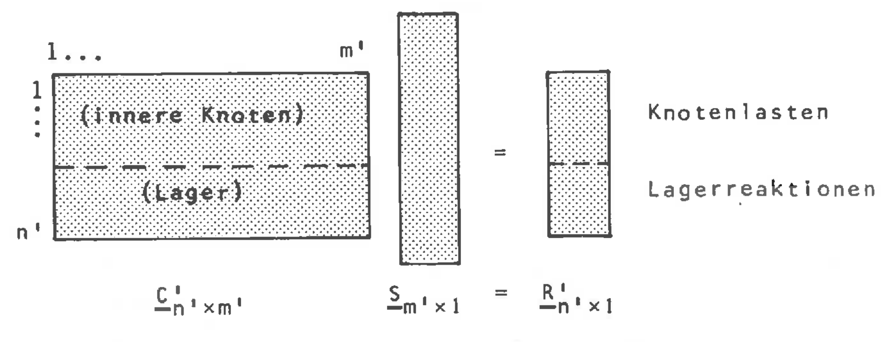


Bild 4.5 Vollständige Gleichgewichtsbedingungen

Der Elementnumerierung folgend wird der Vektor der linear unabhängigen Stabendkräfte eingeführt:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \underline{F}^1 \\ \underline{F}^2 \\ \vdots \\ \underline{F}^q \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

Analog zu (3.9) gilt für das Gesamttragwerk mit $\text{diag}\{(\underline{a}^i)^T\}$ als Hyperdiagonalmatrix (Anhang A1)

$$\underline{S} = \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ \underline{F}\ . \qquad (4.6)$$

Durch Einsetzen in (4.4) erhält man

$$\underline{C}'\ \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ \underline{F} = \underline{R}'\ .$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir

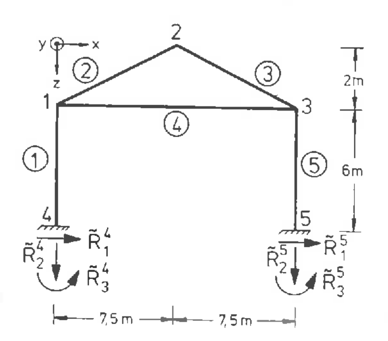
$$(\underline{a}')^T = \underline{C}'\ \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\} \qquad (4.7)$$

und erhalten damit für Gleichung (4.4)

$$(\underline{a}')^T\ \underline{F} = \underline{R}'\ . \qquad (4.8)$$

Es ist dies die *vollständige Gleichgewichtsbedingung* des Gesamttragwerkes.

Zur näheren Erläuterung wird dieses Gleichungssystem für das in Bild 4.6 dargestellte Stabtragwerk aufgestellt.



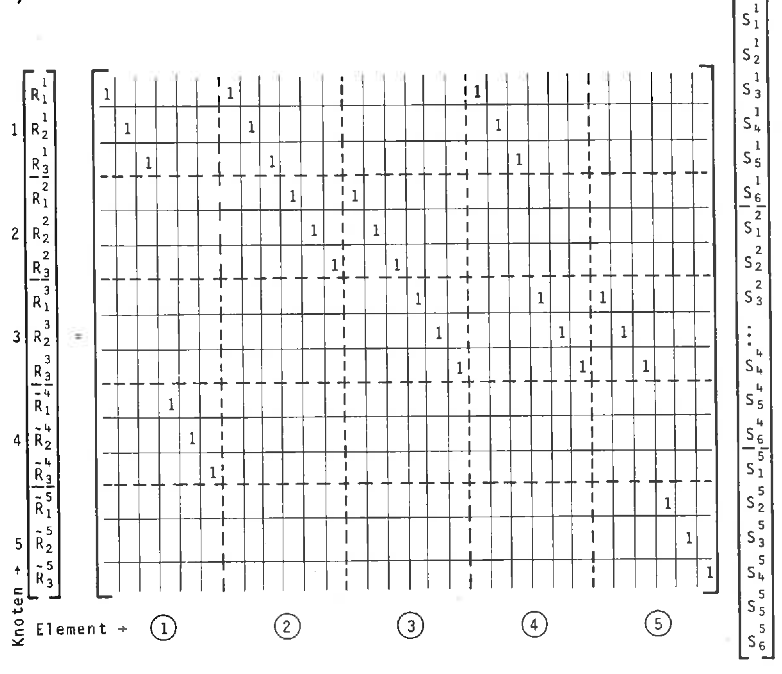
Element	Knoten ℓ	Knoten r
①	1	4
②	1	2
③	2	3
④	1	3
⑤	3	5

Knoten	Koordinaten x [m]	z
1	0	2
2	7,5	0
3	15	2
4	0	8
5	15	8

Bild 4.6 Rahmen in der Ebene mit Verknüpfungstafel

Beispiel 4.1:

Vollständige Gleichgewichtsbedingungen nach Gleichung (4.4):



$$\underline{R}' = \underline{C}' \; \underline{S}$$

Die Elementgleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$ werden dem Elementkatalog (Anhang A3) entnommen. Im Elementkatalog stehen zwei Stabelemente zur Auswahl. Wir wählen das Stabelement Typ-b:

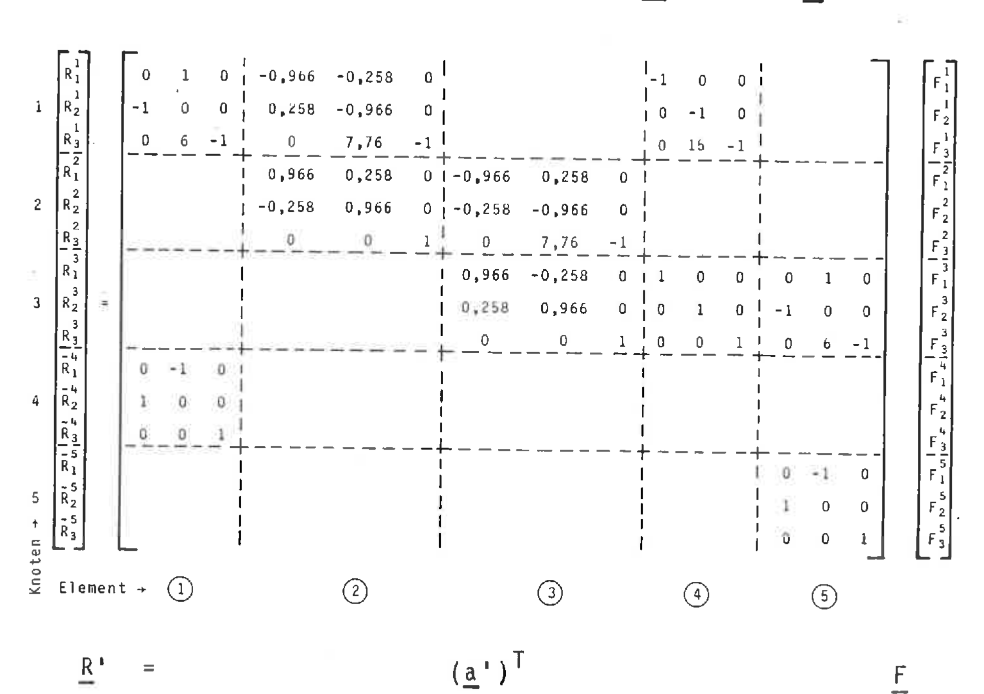
$$(\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & \ell & -1 \\ \hline \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Element	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	6	0	1
②	7,76	0,966	-0,258
③	7,76	0,966	0,258
④	15	1	0
⑤	6	0	1

$$\cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \; , \quad \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$$

$$(\underline{a}^1)^T = (\underline{a}^5)^T = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ \hdashline 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^2)^T = \left[\begin{array}{ccc} -0,966 & -0,258 & 0 \\ 0,258 & -0,966 & 0 \\ 0 & 7,76 & -1 \\ \hdashline 0,966 & 0,258 & 0 \\ -0,258 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^3)^T = \left[\begin{array}{ccc} -0,966 & 0,258 & 0 \\ -0,258 & -0,966 & 0 \\ 0 & 7,76 & -1 \\ \hdashline 0,966 & -0,258 & 0 \\ 0,258 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^4)^T = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



$$\begin{bmatrix} R^1_1 \\ R^1_2 \\ R^1_3 \\ R^2_1 \\ R^2_2 \\ R^2_3 \\ R^3_1 \\ R^3_2 \\ R^3_3 \\ \bar{R}^4_1 \\ \bar{R}^4_2 \\ \bar{R}^4_3 \\ \bar{R}^5_1 \\ \bar{R}^5_2 \\ \bar{R}^5_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc:ccc}
0 & 1 & 0 & -0,966 & -0,258 & 0 & & & & -1 & 0 & 0 & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0,258 & -0,966 & 0 & & & & 0 & -1 & 0 & & & \\
0 & 6 & -1 & 0 & 7,76 & -1 & & & & 0 & 15 & -1 & & & \\ \hdashline
& & & 0,966 & 0,258 & 0 & -0,966 & 0,258 & 0 & & & & & & \\
& & & -0,258 & 0,966 & 0 & -0,258 & -0,966 & 0 & & & & & & \\
& & & 0 & 0 & 1 & 0 & 7,76 & -1 & & & & & & \\ \hdashline
& & & & & & 0,966 & -0,258 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
& & & & & & 0,258 & 0,966 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
& & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 \\ \hdashline
0 & -1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hdashline
& & & & & & & & & & & & 0 & -1 & 0 \\
& & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \begin{bmatrix} F^1_1 \\ F^1_2 \\ F^1_3 \\ F^2_1 \\ F^2_2 \\ F^2_3 \\ F^3_1 \\ F^3_2 \\ F^3_3 \\ F^4_1 \\ F^4_2 \\ F^4_3 \\ F^5_1 \\ F^5_2 \\ F^5_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}' = (\underline{a}')^T \; \underline{F}$$

Für den Aufbau der Gleichgewichtsmatrix entsprechend Gleichung (4.8) ist es nicht erforderlich, die Multiplikation (4.7) durchzuführen. Auch $(\underline{a}')^T$ kann wie $\underline{C}'$ direkt mit der Verknüpfungstafel aufgebaut werden. Ein Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Gleichgewichtsmatrix $(\underline{a}')^T$ ist nur dann verschieden von Null, wenn F_j einen Beitrag zum Gleichgewicht in Richtung von R_i' leistet. In der Gleichgewichtsmatrix steht der Beitrag als Element der betreffenden Gleichgewichtsmatrix des Elementes.
Bisher wurde der Einfluß der Lagerung auf das Gleichgewicht nicht berücksichtigt.
Zwischen den Lagerreaktionen $\underline{\tilde{R}}^k$ und den Knotenlasten an inneren Knoten $\underline{R}^k$ besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. Die Knotenlasten $\underline{R}^k$ sind bekannt, und die Lagerreaktionen $\underline{\tilde{R}}^k$ sind unbekannt. Das bedeutet, daß die Gleichungen mit den Lagerreaktionen im Lastvektor $\underline{R}'$ keine Bestimmungsgleichungen für $\underline{F}$ sind. Die Anzahl der Lagerreaktionen wird mit n_r bezeichnet.

Die letzten n_r Zeilen von $(\underline{a}')^T$, die das Gleichgewicht der Lagerpunkte beschreiben, können nicht zur Bestimmung der linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ verwendet werden, da die Lagerreaktionen unbekannt sind.
Das Gleichgewicht des Gesamtsystems ist allein durch die Gleichgewichtsbedingungen der inneren Knoten bestimmt.

Die Anzahl der Knotenlasten R_i^k wird mit n bezeichnet:

$$n = n' - n_r \ .$$

Für Tragwerke mit unverschieblichen Lagern ist die Matrix der ersten n Zeilen von $(\underline{a}')^T$ die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ (Bild 4.7).
Eine andere Möglichkeit zur Berücksichtigung der Lagerreaktionen besteht darin, daß man die unbekannten Stabendkräfte $\underline{F}$ mit den unbekannten Lagerreaktionen in einem Vektor zusammenfaßt. Dieser Weg wird in der Literatur (/66/, /47/) verschiedentlich angegeben. Da er jedoch eine größere

Gleichgewichtsmatrix als der hier beschriebene Weg erfordert, wird er nicht weiter verfolgt.

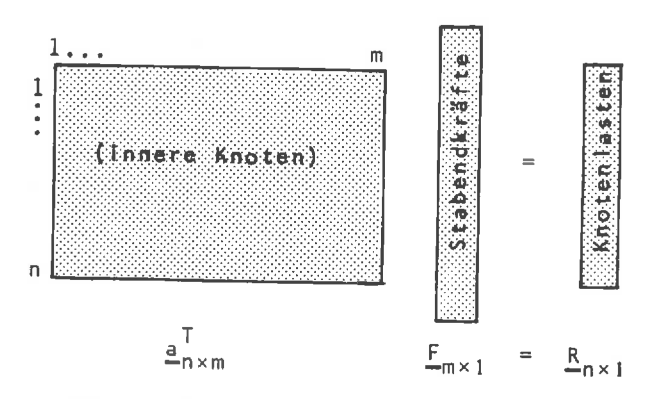


Bild 4.7 Gleichgewichtsgleichungen des Tragwerks

4.4 Verschiebliche Lager

Die Forderung, daß das Tragwerk nur unverschiebliche Lager hat, soll nun fallengelassen werden: wir betrachten verschiebliche Lager. Die Lagerung muß aber *statisch zulässig* sein, d.h., die Lagerung muß die Starrkörperverschiebungen ausschließen. Beispiele der Ausführungsmöglichkeiten verschieblicher Lager sind in Bild 4.8 dargestellt.

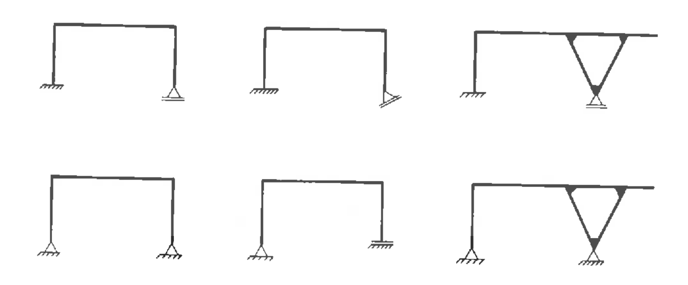


Bild 4.8 Lagerungsmöglichkeiten eines ebenen Stabwerkes

Aus Bild 4.8 erkennt man, daß schon bei einfachsten Tragwerken eine Vielfalt von Lagerungsmöglichkeiten besteht.

Bei räumlichen Stabtragwerken fällt teilweise sogar die symbolische Darstellung schwer. Man behilft sich in solchen Fällen durch Angabe der Verschiebungsrichtungen oder der Randbedingungen der Kräfte. Die Randbedingungen der Kräfte sind durch die konstruktive Gestaltung des Lagers gegeben.

Zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen in einem verschieblichen Lager ℓ führen wir den Vektor der resultierenden Stabendkräfte $\underline{\tilde{S}}^{\ell}$ ein. Analog zur Gleichung (4.4) gilt für das Lager ℓ:

$$\underline{C}^{\ell}\,\underline{S} = \underline{\tilde{S}}^{\ell}\,. \tag{4.9}$$

$\underline{C}^{\ell}$ ist die zum Knoten ℓ gehörige Verknüpfungsmatrix. Die Dimension p von $\underline{\tilde{S}}^{\ell}$ wird entsprechend Definition 4.2 festgelegt.

Ein verschiebliches Lager kann in Richtung der linear unabhängigen Verschiebungskomponenten den Lastvektor $\underline{R}^{\ell}$ aufnehmen; es kann in diesen Richtungen keine Kräfte auf den Baugrund übertragen, d.h., es gibt in den Verschiebungsrichtungen keine Lagerreaktionen.

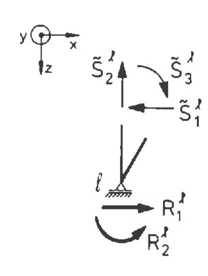
Die Dimension q von $\underline{R}^{\ell}$ ist gleich der Anzahl der Verschiebungskomponenten am Lager ℓ. Sie hängt von der konstruktiven Ausbildung des Lagers ab.

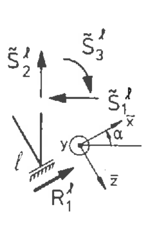
Die Gleichgewichtsbedingungen können dann wie folgt in allgemeiner Form dargestellt werden:

$$\underline{L}^{\ell}\,\underline{\tilde{S}}^{\ell} = \underline{R}^{\ell}\,. \tag{4.10}$$

$\underline{L}^{\ell}$ ist eine q×p -Matrix. Sie muß im Einzelfall aus den vorgegebenen Randbedingungen berechnet werden. Fallen die linear unabhängigen Verschiebungskomponenten nicht mit den globalen Koordinatenrichtungen zusammen, so ist $\underline{L}^{\ell}$ so zu bestimmen, daß sie eine Drehung von $\underline{\tilde{S}}^{\ell}$ in die Richtungen der linear unabhängigen Verschiebungskomponenten bewirkt.

Zur Erläuterung geben wir einige Beispiele (Bild 4.9) für die Formulierung von Gleichung (4.10).





(a) verschiebliches Gelenklager (b) schräges Gleitlager

Bild 4.9 Knotenkräfte und Knotenlasten für verschiedene Lagerformen

Beispiel 4.2:
Formulierung der Randbedingungen für verschiebliche Lager

(a) Verschiebliches Gelenklager nach Bild 4.9 (a):

Gleichgewicht in x-Richtung: $\tilde{S}_1^\ell = R_1^\ell$;

Gleichgewicht um die y-Achse: $\tilde{S}_3^\ell = R_2^\ell$;

in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_1^\ell \\ \tilde{S}_2^\ell \\ \tilde{S}_3^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^\ell \\ R_2^\ell \end{bmatrix}$$

(b) Schräges Gleitlager nach Bild 4.9 (b):

Gleichgewicht in $\bar{x}$-Richtung: $\tilde{S}_1^\ell \cos\alpha - \tilde{S}_2^\ell \sin\alpha = R_1^\ell$,

in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_1^\ell \\ \tilde{S}_2^\ell \\ \tilde{S}_3^\ell \end{bmatrix} = R_1^\ell \ .$$

4.5 Gelenke

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Stäbe eines Stabtragwerkes immer biegesteif miteinander verbunden sind. In Kapitel 2 wurden jedoch auch Stabtragwerke mit "Gelenken" eingeführt. Der Begriff eines Gelenkes kann nunmehr präzisiert werden:

Definition 4.4: *Ein innerer Knotenpunkt, in welchem Randbedingungen der Stabendkräfte gegeben sind, wird als Gelenkknoten bezeichnet.*

Beispiele der Ausführungsmöglichkeit solcher Gelenkknoten sind in Bild 2.3 und Bild 4.10 dargestellt.



Bild 4.10 Ausführungsformen allgemeiner Gelenkknoten bei ebenen Stabtragwerken

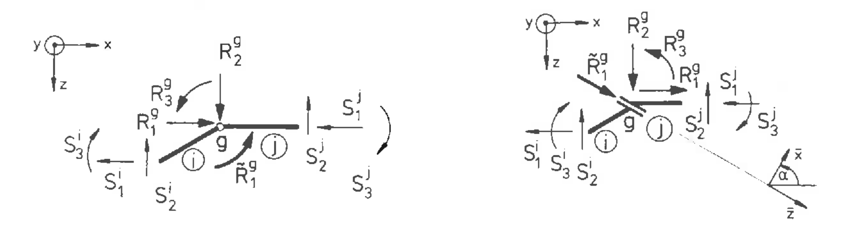
Die Möglichkeiten zur Ausführung von Gelenkknoten sind prinzipiell die gleichen wie für Lager. Auch die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen in solchen Knoten verläuft im Prinzip gleich.
Nach Definition 4.2 gibt es den zusätzlichen Lastvektor $\underline{\tilde{R}}^g$. Die Dimension q von $\underline{\tilde{R}}^g$ ist gleich der Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade der Verschiebung am Gelenk g.
Damit ist

$$(\underline{\tilde{R}}^g)^T = [\, \tilde{R}_1^g \ \tilde{R}_2^g \ \ldots \ \tilde{R}_q^g \,] . \tag{4.11}$$

Die Randbedingungen der Gelenkknoten können wie folgt dargestellt werden:

$$\underline{L}^g \ \underline{S} = \underline{\tilde{R}}^g . \tag{4.12}$$

$\underline{L}^g$ ist eine [q×m']-Matrix mit linear unabhängigen Zeilen. Die Anzahl der Stabendkräfte des Tragwerkes ist m'. Wie bei verschieblichen Lagern muß $\underline{L}^g$ auch bei Gelenkknoten, den Randbedingungen entsprechend, für den Einzelfall aufgestellt werden. Zur Erläuterung sind zwei Beispiele aufgeführt (Bild 4.11).



(a) Momentengelenk (b) schräges Kraftgelenk

Bild 4.11 Randbedingungen für Gelenkknoten

Beispiel 4.3:
Formulierung der Randbedingungen für Gelenkknoten (Gleichung (4.12)).

(a) Momentgelenk nach Bild 4.11 (a)
Die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten g lauten:

$$\begin{aligned} S_1^i + S_1^j &= R_1^g , \\ S_2^i + S_2^j &= R_2^g , \\ S_3^i + S_3^j &= R_3^g . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Diese Gleichungen sind in $\underline{C}'$ bzw. $(\underline{a}')^T$ bereits enthalten. Die Randbedingung für den Gelenkknoten ist entweder

$$\begin{aligned} & S_3^i = \tilde{R}_1^g \\ \text{oder} \quad & S_3^j = \tilde{R}_1^g . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Beide Gleichungen kennzeichnen ein Momentengelenk in g. Im ersten Fall greift $\tilde{R}_1^g$ im Stab (i) an, im zweiten im Stab (j). In der praktischen Berechnung wird durch die konstruk-

tive Ausbildung des Gelenks der Angriffspunkt des Moments festgelegt.

(b) Schräges Kraftgelenk nach Bild 4.11 (b)
Die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten g sind mit denen des Beispiels 4.3 (a) identisch.
Die Randbedingung entsprechend Gleichung (4.12) lautet abhängig von der konstruktiven Ausbildung des Gelenkes entweder

$$S_1^i \sin\alpha + S_2^i \cos\alpha = \tilde{R}_1^g$$

oder $$S_1^j \sin\alpha + S_2^j \cos\alpha = \tilde{R}_1^g \, .$$

Für alle Verbindungen der Elemente untereinander und der Elemente mit dem Baugrund können somit die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

4.6 Gleichgewichtsbedingungen allgemeiner Stabwerke

Zur Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen allgemeiner Stabwerke mit verschieblichen Lagern und Gelenkknoten fassen wir zunächst die Lastvektoren und Transformationsmatrizen zusammen:

$$\underline{R}^r = \begin{bmatrix} \underline{R}^\ell \\ \hline \tilde{\underline{R}}^g \end{bmatrix} \qquad \underline{C}^r = \begin{bmatrix} \underline{L}^\ell & \underline{C}^\ell \\ \hline \underline{L}^g & \end{bmatrix}$$

Für die Gleichungen (4.9), (4.10) und (4.12) ergibt sich dann:

$$\underline{C}^r \, \underline{S} = \underline{R}^r \, . \tag{4.15}$$

Mit Gleichung (4.6) erhält man:

$$\underline{C}^r \operatorname{diag} \{(\underline{a}^i)^T\} \, \underline{F} = \underline{R}^r \, .$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir

$$(\underline{a}^r)^T = \underline{C}^r \operatorname{diag} \{(\underline{a}^i)^T\} \tag{4.16}$$

und stellen damit alle Randbedingungen der Stabendkräfte durch folgende Gleichgewichtsbedingung dar:

$$(\underline{a}^r)^T \underline{F} = \underline{R}^r . \qquad (4.17)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamttragwerkes erhält man nun, indem man die letzten n_r Gleichungen in (4.8)

$$(\underline{a}')^T \underline{F} = \underline{R}'$$

und in (4.4) $\underline{C}' \, \underline{S} = \underline{R}'$

durch die Gleichgewichtsbedingungen (4.17) bzw. (4.15) ersetzt.
Diese vollständigen Gleichgewichtsbedingungen für Stabwerke mit verschieblichen Lagern und Gelenkknoten bezeichnen wir mit

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} \qquad (4.18)$$

und $$\underline{C} \, \underline{S} = \underline{R} , \qquad (4.19)$$

wobei $$\underline{a}^T = \underline{C} \text{ diag } \{(\underline{a}^i)^T\} . \qquad (4.20)$$

Der Aufbau von $\underline{a}^T$ aus den Teilmatrizen ist symbolisch in Bild 4.12 dargestellt. Da die letzen n_r Zeilen von $(\underline{a}')^T$ ersetzt wurden, gilt der folgende

Satz 4.2: *Die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ eines Stabwerkes besitzt genau n linear unabhängige Zeilen und m ≥ n Spalten.*

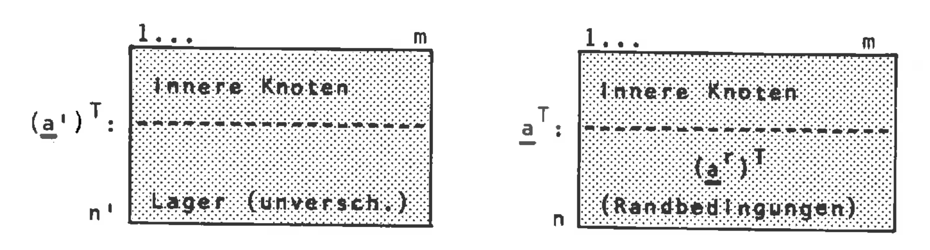
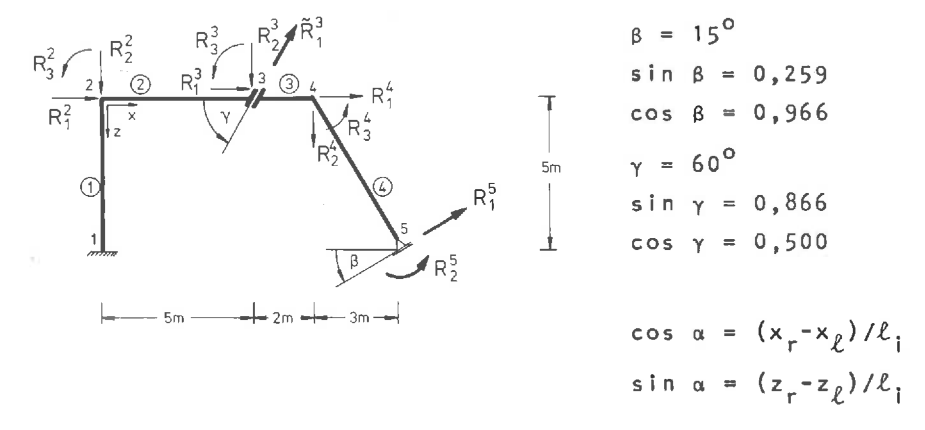


Bild 4.12 Symbolische Darstellung der vollständigen Gleichgewichtsmatrix

Für die praktische Berechnung wird die eingangs gestellte Forderung, daß die Randknoten die Knoten mit den größten Knotennummern sind, fallengelassen.
Außerdem ist es nicht notwendig, die Randbedingungen in Gelenken als letzte Gleichungen in die Gleichgewichtsmatrix zu schreiben. In dem folgenden Beispiel soll der Aufbau der Gleichgewichtsbedingungen für ein Stabtragwerk mit einem Gelenk und einem verschieblichen Lager gezeigt werden.

Beispiel 4.4:
Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Stabtragwerkes



Knoten	Koordinaten x [m]	z
1	0	5
2	0	0
3	5	0
4	7	0
5	10	5

Element	Knoten ℓ	r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	2	5	0	-1
②	2	3	5	1	0
③	3	4	2	1	0
④	4	5	5,831	0,514	0,857

Bild 4.13 Ebener Rahmen

Aus dem Elementkatalog (Anhang A3) wählen wir das Stabelement Typ-b.

$$(\underline{a}^{i})^{T} = \left[\begin{array}{ccc} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & \ell & -1 \\ \hline \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^{4})^{T} = \left[\begin{array}{ccc} -0{,}514 & 0{,}857 & 0 \\ -0{,}857 & -0{,}514 & 0 \\ 0 & 5{,}831 & -1 \\ \hline 0{,}514 & -0{,}857 & 0 \\ 0{,}857 & 0{,}514 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^{1})^{T} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\underline{a}^{2})^{T} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (\underline{a}^{3})^{T} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Berücksichtigung des schrägen Gelenklagers im Knoten 5:

Aus $(\underline{a}^{4})^{T}$ erhält man:

$$\tilde{S}_1^5 = 0{,}514\ F_1^4 - 0{,}857\ F_2^4 \ ,$$
$$\tilde{S}_2^5 = 0{,}857\ F_1^4 + 0{,}514\ F_2^4 \ ,$$
$$\tilde{S}_3^5 = F_3^4 \ .$$

Mit Gleichung (4.10) ergibt sich in Richtung der linear unabhängigen Knotenverschiebungen wie in Beispiel 4.2:

$$\begin{aligned} R_1^5 &= \tilde{S}_1^5 \cos\beta - \tilde{S}_2^5 \sin\beta \\ &= (0{,}514\ F_1^4 - 0{,}857\ F_2^4)\cos\beta \\ &\quad -(0{,}857\ F_1^4 + 0{,}514\ F_2^4)\sin\beta \\ &= 0{,}275\ F_1^4 - 0{,}961\ F_2^4 \end{aligned}$$

und $\quad R_2^5 = \tilde{S}_3^5 = F_3^4 \ .$

Berücksichtigung des schrägen Kraftgelenkes im Knoten 3:

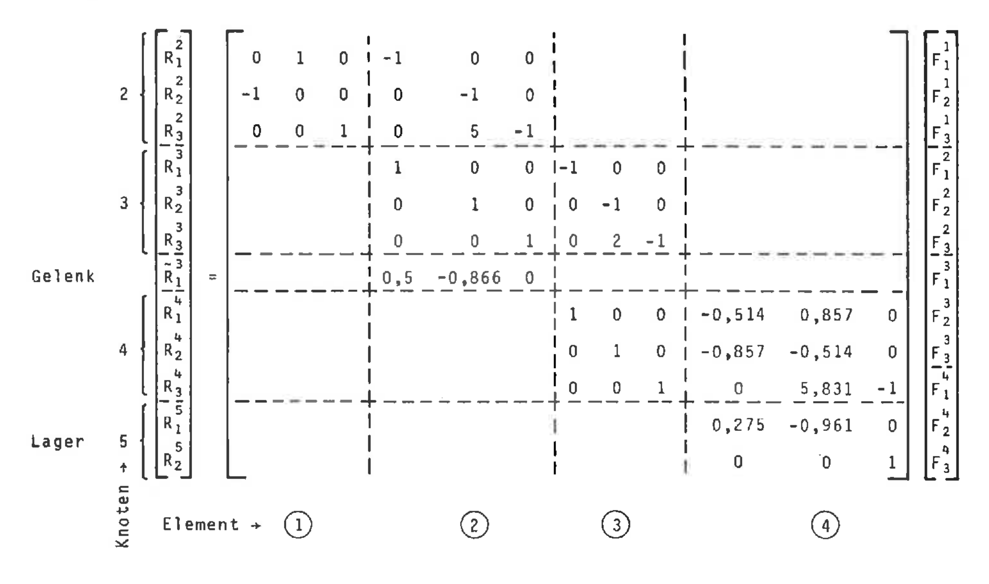
Mit Gleichung (4.12) ergibt sich in Richtung der zusätzlichen Knotenverschiebung wie in Beispiel 4.3 (b), wenn das Gelenk aus konstruktiven Gründen zum Element ② gehört

$$\tilde{R}_1^3 = S_4^2 \cos\gamma - S_5^2 \sin\gamma \; .$$

Aus $(\underline{a}^2)^T$ erhält man als zusätzliche Gleichgewichtsbedingung

$$\tilde{R}_1^3 = F_1^2 \cos\gamma - F_2^2 \sin\gamma$$
$$= 0{,}5\, F_1^2 - 0{,}866\, F_2^2 \; .$$

Damit können die Gleichgewichtsbedingungen für das Tragwerk aufgestellt werden.



$$\begin{bmatrix} R_1^2 \\ R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_1^3 \\ R_2^3 \\ R_3^3 \\ \tilde{R}_1^3 \\ R_1^4 \\ R_2^4 \\ R_3^4 \\ R_1^5 \\ R_2^5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ \hline & & & 0{,}5 & -0{,}866 & 0 & & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 & -0{,}514 & 0{,}857 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & -0{,}857 & -0{,}514 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 5{,}831 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & 0{,}275 & -0{,}961 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ F_1^4 \\ F_2^4 \\ F_3^4 \end{bmatrix}$$

Mit dem in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren können für alle Stabwerke die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Unter welchen Bedingungen die Stabendkräfte damit bestimmt werden können, wollen wir im folgenden erläutern.

4.7 Redundanz eines Stabwerkes

Aus der Mechanik /39/ sind der Begriff der Redundanz (statischen Unbestimmtheit) und Abzählkriterien zur Feststellung der Redundanz bekannt. Die Redundanz eines Tragwerkes ergibt sich direkt aus der Ordnung n×m der Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ (Bild 4.12). Es gilt:

Satz 4.3: *Ein Tragwerk ist statisch bestimmt, wenn n=m ist; ein Tragwerk ist statisch unbestimmt, wenn n<m ist; ein Tragwerk ist kinematisch verschieblich, wenn n>m ist.*

Für n=m, d.h., wenn das Tragwerk statisch bestimmt ist, können wir das Gleichungssystem $\underline{a}^T \; \underline{F} = \underline{R}$ lösen. Die Stabendkräfte und damit die Schnittgrößen können allein mit den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

In der Literatur findet man oft eine Unterscheidung in *äußerliche* und *innerliche* statische Bestimmtheit.
Ein Tragwerk ist *äußerlich statisch bestimmt*, wenn die Lagerreaktionen alleine mit den 3 (6) Gleichgewichtsbedingungen der Ebene (des Raumes) berechnet werden können.
Der Begriff der *inneren statischen Bestimmtheit* eines statisch unbestimmten Tragwerkes sagt aus, daß eine statisch unbestimmte Lagerung vorliegt.
Oft findet man auch den Begriff der *Wertigkeit eines Lagers*. Unter der Wertigkeit eines Lagers versteht man die Anzahl der durch das Lager behinderten Verschiebungen.

4.8 Schnittgrößen statisch bestimmter Stabwerke

Bei statisch bestimmten Stabwerken ist die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ *quadratisch* und *nichtsingulär*, d.h. es existiert die Inverse $(\underline{a}^T)^{-1}$. Die linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ können mit dem Gauß'schen Algorithmus (siehe Anhang A2.1)

berechnet werden.

Sind die linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ aus der Lösung des linearen Gleichungssystems (4.18) bekannt, können die Vektoren der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ in lokalen Koordinaten elementweise mit Gleichung (3.3) berechnet werden. Die Schnittgrößen ergeben sich aus den Stabendkräften durch (vgl. Definition 3.2):

Definition 4.5: *Die Schnittgrößen am rechten Stabende (r) sind die Stabendkräfte am rechten Stabende; die Schnittgrößen am linken Stabende (ℓ) sind die negativen Stabendkräfte am linken Stabende.*

Bei *Fachwerken* ist die Ermittlung der Schnittgrößen einfacher. Mit Gleichung (3.2) ergibt sich, daß die Normalkraft N in jedem Stab mit der linear unabhängigen Stabendkraft identisch ist. Die Transformation nach Gleichung (3.3) ist somit überflüssig.

Bei *ebenen Stabtragwerken* stellt man die Schnittgrößen graphisch durch die sogenannten *Zustandslinien* dar. Da wir vorläufig nur unbelastete Elemente betrachten, sind die Normalkraft N und die Querkraft Q in jedem Element konstant, und das Biegemoment M ist linear veränderlich. Einen Überblick über die erforderlichen Einzelschritte gibt die folgende

Zusammenfassung der Berechnung der Schnittgrößen statisch bestimmter Stabwerke

(1) Numerierung der Knoten und Elemente;
(2) Aufstellen der Koordinaten- und Verknüpfungstafel;
(3) Festlegung der Elementtypen entsprechend Anhang A3;
(4) Zusammenstellung der Gleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$;
(5) Zusammenbau der Gleichgewichtsmatrizen der Elemente zur Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ unter Berücksichtigung der

Randbedingungen;

(6) Lösung des Gleichungssystems $\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R}$;

(7) Berechnung von $\underline{\bar{S}}^i = \underline{T}^i \underline{F}^i$;

(8) Umkehr der Vorzeichen am linken Stabende, bei ebenen Stabtragwerken graphische Darstellung der Schnittgrößen.

An einem Beispiel (Bild 4.14) soll nun die Ermittlung der Zustandslinien eines einfachen Rahmens gezeigt werden.

Beispiel 4.5:

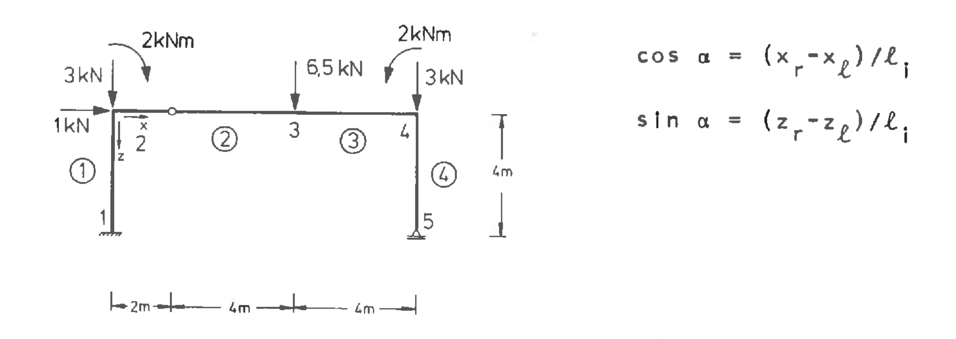


Bild 4.14 Rahmen

Koordinatentafel

Knoten	x [m]	z
1	0	4
2	0	0
3	6	0
4	10	0
5	10	4

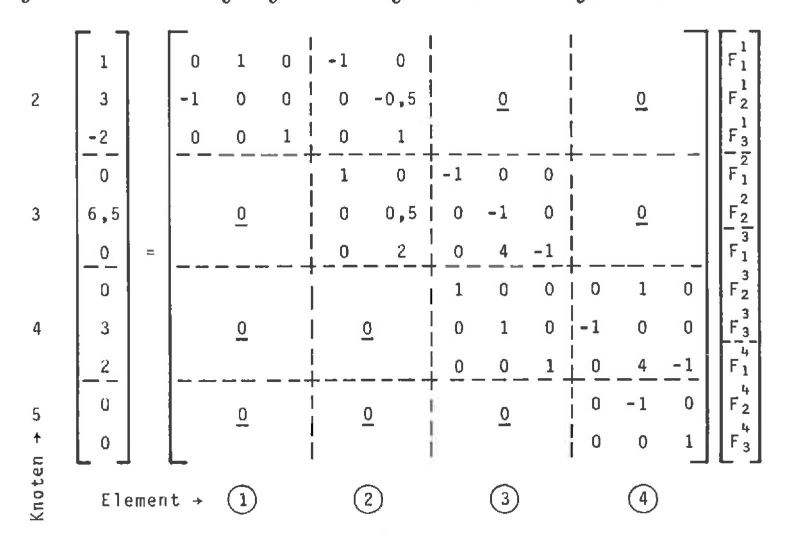
Verknüpfungstafel

Element	Knoten ℓ	r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	2	4	0	-1
②	2	3	6	1	0
③	3	4	4	1	0
④	4	5	4	0	1

Elementgleichgewichtsmatrizen (für die Elemente ①, ③ und ④ wird Stabelement Typ-b gewählt).

$$
(\underline{a}^1)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
(\underline{a}^2)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}
\quad
(\underline{a}^3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
(\underline{a}^4)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Gleichgewichtsbedingungen des gesamten Tragwerks



$$
\begin{array}{c}
2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \\ 4 \\ \\ \\ 5 \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ \hline 0 \\ 6{,}5 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & & \underline{0} & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\ \hline
 & & & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\
 & \underline{0} & & 0 & 0{,}5 & 0 & -1 & 0 & & \underline{0} & \\
 & & & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & & & \\ \hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \underline{0} & & & \underline{0} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ \hline
 & \underline{0} & & & \underline{0} & & \underline{0} & & 0 & -1 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ \hline F_1^2 \\ F_2^2 \\ \hline F_1^3 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ \hline F_1^4 \\ F_2^4 \\ F_3^4 \end{bmatrix}
$$

Knoten ↑ Element → ① ② ③ ④

Für die Lösung des Gleichungssystems verwenden wir das Matrizeninterpretationssystem SMIS /37/.

Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt:

```
LOAD    F1 = AT    N1 = 11   N2 = 11
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{a}^T$.

```
LOAD    F1 = R     N1 = 11   N2 = 1
  :
```

Es folgen die Elemente des Vektors $\underline{R}$.

```
SOLVE   F1 = AT    F2 = R
PRINT   F1 = R
```

Es werden die linear unabhängigen Stabendkräfte ausgegeben:

$$\underline{F}^T = [-6{,}5 \quad 1 \quad -9 \mid 0 \quad 7 \mid 0 \quad -3 \quad 2 \mid -6 \quad 0 \quad 0\,].$$

Kräftetransformationsmatrizen

$$\underline{T}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabendkräfte

$$\underline{\bar{S}}^1 = \begin{bmatrix} 6{,}5 \\ -1 \\ 13 \\ \hline -6{,}5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^1 \\ \bar{S}_2^1 \\ \bar{S}_3^1 \\ \hline \bar{S}_4^1 \\ \bar{S}_5^1 \\ \bar{S}_6^1 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{S}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}5 \\ 7 \\ \hline 0 \\ 3{,}5 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 \\ \bar{S}_2^2 \\ \bar{S}_3^2 \\ \hline \bar{S}_4^2 \\ \bar{S}_5^2 \\ \bar{S}_6^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{S}}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -14 \\ \hline 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^3 \\ \bar{S}_2^3 \\ \bar{S}_3^3 \\ \hline \bar{S}_4^3 \\ \bar{S}_5^3 \\ \bar{S}_6^3 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{S}}^4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^4 \\ \bar{S}_2^4 \\ \bar{S}_3^4 \\ \hline \bar{S}_4^4 \\ \bar{S}_5^4 \\ \bar{S}_6^4 \end{bmatrix}$$

Schnittgrößen am linken und rechten Stabende (Dimension [kN, kNm])

Element: ① ② ③ ④

$$\begin{bmatrix} N_\ell \\ Q_\ell \\ M_\ell \\ \hline N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}5 \\ 1 \\ -13 \\ \hline -6{,}5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_\ell \\ Q_\ell \\ M_\ell \\ \hline N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ -7 \\ \hline 0 \\ 3{,}5 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_\ell \\ Q_\ell \\ M_\ell \\ \hline N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 14 \\ \hline 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_\ell \\ Q_\ell \\ M_\ell \\ \hline N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die *Zustandslinien* sind in Bild 4.15 graphisch dargestellt.

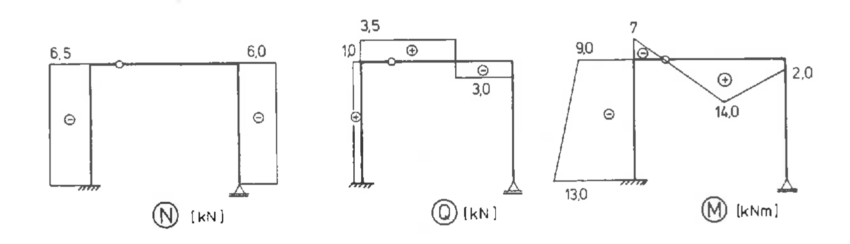
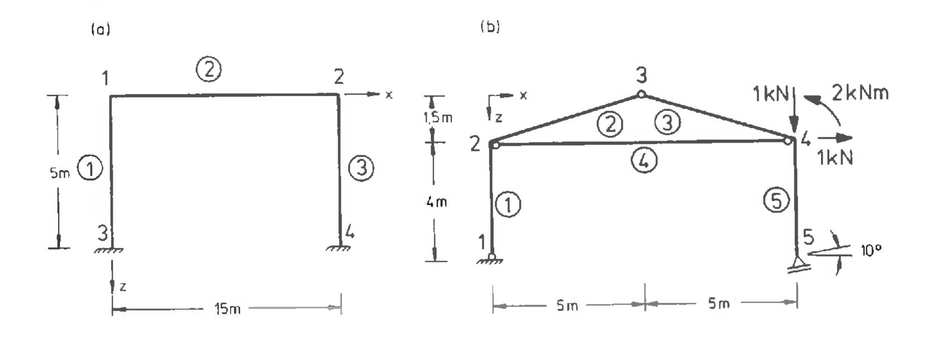


Bild 4.15 Zustandslinien

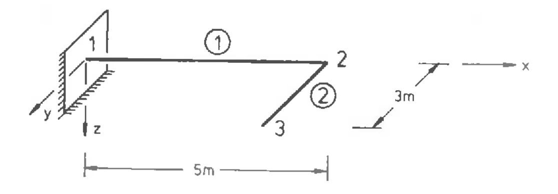
Aufgaben:

4.1 Man stelle für die in Aufgabe 2.1 und 2.2 dargestellten Systeme die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ auf. Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist jeweils anzugeben. Für die statisch bestimmten Systeme sind die Schnittgrößen zu ermitteln.

4.2 Man stelle für die abgebildeten Stabtragwerke die Gleichgewichtsmatrix auf. Bei Aufgabe (a) verwende man einmal Stabelement Typ-a und einmal Stabelement Typ-b. Bei Aufgabe (b) ermittle man die Schnittgrößen.



4.3 Für den abgebildeten Kragarm stelle man die Gleichgewichtsmatrix auf. Die Elemente sollen einmal Trägerrost- und einmal räumliche Stabelemente sein. Wie darf der Kragarm belastet werden, damit man ihn wie einen Trägerrost berechnen kann?



5 Flexibilitätsmatrizen und Verformungen statisch bestimmter Stabwerke

Für die Berechnung der Verformungen eines Tragwerkes müssen die Materialeigenschaften aller Elemente bekannt sein. Die Materialeigenschaften werden durch das Materialgesetz beschrieben. Im folgenden wird ein linear-elastischer, homogener und isotroper Werkstoff vorausgesetzt, für den das Hooke'sche Gesetz gilt:

$$\sigma = E\,\varepsilon\ , \quad E > 0\ , \tag{5.1}$$

d.h., in einem idealen, einachsigen Zugversuch sind die Spannungen σ proportional zu den Dehnungen ε. Der Proportionalitätsfaktor ist der Elastizitätsmodul E.
Die Schubspannungen τ sind mit G als Gleit- oder Schubmodul proportional zur Gleitung γ:

$$\tau = G\,\gamma\ . \tag{5.2}$$

Schubmodul und Elastizitätsmodul sind über die Querdehnzahl μ miteinander gekoppelt:

$$E = 2G(1+\mu)\ . \tag{5.3}$$

Des weiteren werden die grundlegenden Annahmen der Balkenbiegelehre und der Torsionstheorie als bekannt vorausgesetzt (siehe z.B. /39/).
Die Berechnung der Verformungsbeziehungen erfolgt beispielhaft für zwei Stabelemente auf verschiedenen Wegen, und zwar durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit und durch Integration der Differentialgleichungen der Balkentheorie.
Die Ableitung für andere Elementtypen ist analog; die Ergebnisse sind im Anhang A3 zusammengestellt.

5.1 Verformungsgrößen eines Stabelementes

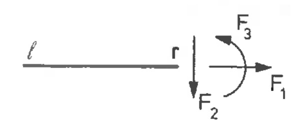
Jeder Kraftgröße eines Stabelementes wird eine Verformungsgröße zugeordnet, so daß das Skalarprodukt der Kraft- und Verformungsgrößen - die Arbeit - gebildet werden kann:
Die zu Kraftgrößenkomponenten korrespondierenden Komponenten der Verformungsgrößen sind in demselben Knotenpunkt definiert und besitzen dieselbe Wirkungsrichtung.
Dies ist beispielhaft am Stabelement in Bild 5.1 skizziert.

Stabelement Typ-a

Stabelement Typ-b

Kraftgrößen

ℓ r F_3 F_1 F_2



korrespondierende Verformungsgrößen



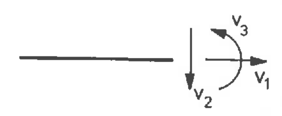


Bild 5.1 Verformungsgrößen eines ebenen Stabelementes

Die Verformungsgrößen werden wie folgt bezeichnet:

$\underline{v}^i$: linear unabhängige Elementverformungen,

$\underline{\bar{u}}^i$: Stabendverformungen in lokalen Koordinaten,

$\underline{u}^i$: Stabendverformungen in globalen Koordinaten.

Im Gesamttragwerk entsprechen den Verformungsgrößen $\underline{v}$, $\underline{\bar{u}}$ und $\underline{u}$ die Kraftgrößen $\underline{F}$, $\underline{\bar{S}}$ und $\underline{S}$.
Zwischen den linear unabhängigen Stabendkräften $\underline{F}^i$ und den zugehörigen Verformungen $\underline{v}^i$ besteht aufgrund des Hookeschen Gesetzes eine *umkehrbar eindeutige Zuordnung:*

$$\underline{v}^i = \underline{f}^i\, \underline{F}^i. \tag{5.4}$$

Die *Flexibilitätsmatrix* $\underline{f}^i$ ist eine *quadratische, nicht-*

singuläre Matrix, deren Kantenlänge der Dimension von $\underline{F}^i$ entspricht.

Die Berechnung der Komponenten von $\underline{f}^i$ wird zunächst auf der Grundlage des Prinzips der virtuellen Arbeit /39/ dargestellt.
Für die j-te Zeile von (5.4) erhält man:

$$v_j^i = f_{j1}^i F_1^i + f_{j2}^i F_2^i + \ldots + f_{jn}^i F_n^i \ . \qquad (5.5)$$

Hierbei ist n die Dimension von $\underline{F}^i$.
f_{jk}^i ist die j-te Verformungskomponente v_j^i für eine Einheitsbelastung

$$F_k^i = 1 \quad \text{und} \quad F_j^i = 0 \quad \text{für alle } j \neq k \ .$$

Die Stabendkräfte $\underline{F}^i$ werden dabei als äußere Kräfte betrachtet, die ein Gleichgewichtssystem bilden (Kapitel 3). Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* kann wie folgt angewendet werden: Die Arbeit einer gedachten Belastung (virtuellen Kraft) $\hat{F}_k^i = 1$ an der Verformung f_{jk}^i ist gleich der im Element gespeicherten virtuellen Formänderungsarbeit W_j^i. Damit gilt

$$f_{jk}^i \hat{F}_k^i = W_j^i \equiv f_{jk}^i \qquad (5.6)$$

wegen $\hat{F}_k^i = 1$.
Wir fassen diese Aussage zusammen in

Satz 5.1: *Die Komponenten f_{jk}^i der Flexibilitätsmatrix $\underline{f}^i$ sind gleich der im Element ⓘ gespeicherten Formänderungsenergie unter der Belastung $F_k^i = 1$ und einer virtuellen Belastung $\hat{F}_j^i = 1$.*

Die Berechnung der Flexibilitätsmatrix wird im folgenden für das räumliche Stabelement durchgeführt.

Beispiel 5.1:
Die Stabendkräfte $\underline{F}^i$ sind mit den Verformungen $\underline{v}^i$ in Bild

5.2 dargestellt. Der Kopfzeiger i für das Element ⓘ ist im Bild und im folgenden Text zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

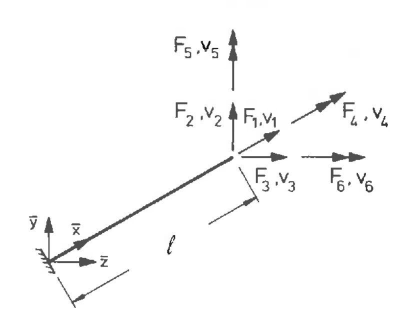


Bild 5.2 Statisch bestimmt gelagertes räuml. Stabelement

Die Komponenten F_j des Kraftvektors sind die tatsächlich vorhandenen, äußeren Kräfte am statisch bestimmt gelagerten Element (vgl. Kapitel 3).
Die Schnittgrößen infolge $F_j = 1$ als Funktionen der lokalen Elementkoordinaten sind $N(\bar{x})$, $Q_y(\bar{x})$, $Q_z(\bar{x})$, $M_x(\bar{x})$, $M_y(\bar{x})$ und $M_z(\bar{x})$:

$$
\begin{aligned}
\text{Aus } F_1 &= 1 \quad \text{folgt} \quad N(\bar{x}) = 1 \;; \\
F_2 &= 1 \quad \ldots \quad Q_y(\bar{x}) = 1 \quad \text{und} \quad M_z(\bar{x}) = \ell - \bar{x} \;; \\
F_3 &= 1 \quad \ldots \quad Q_z(\bar{x}) = 1 \quad \text{und} \quad M_y(\bar{x}) = -\ell + \bar{x} \;; \qquad (5.7) \\
F_4 &= 1 \quad \ldots \quad M_x(\bar{x}) = 1 \;; \\
F_5 &= 1 \quad \ldots \quad M_y(\bar{x}) = 1 \;; \\
F_6 &= 1 \quad \ldots \quad M_z(\bar{x}) = 1 \,.
\end{aligned}
$$

Für virtuelle Kräfte $\hat{F}_j = 1$ erhält man gleich große Schnittgrößen; zur Unterscheidung werden diese Schnittgrößen mit einem Dach ^ gekennzeichnet. Die Formänderungsenergie des Stabelementes mit konstantem Querschnitt unter

der Belastung $F_j = 1$ und $\hat{F}_k = 1$ ergibt sich zu (vgl. /39/, 2. Bd., Seite 193 ff)

$$f_{jk} = \int_0^{\ell} \Big[\frac{N(\bar{x})\hat{N}(\bar{x})}{EA} + \kappa_y \frac{Q_y(\bar{x})\hat{Q}_y(\bar{x})}{GA} + \kappa_z \frac{Q_z(\bar{x})\hat{Q}_z(\bar{x})}{GA} + \frac{M_x(\bar{x})\hat{M}_x(\bar{x})}{GI_T} + \frac{M_y(\bar{x})\hat{M}_y(\bar{x})}{EI_y} + \frac{M_z(\bar{x})\hat{M}_z(\bar{x})}{EI_z} \Big] d\bar{x} \; . \tag{5.8}$$

Hierbei ist

- A die Querschnittsfläche,
- I_T der St. Venant'sche Drillwiderstand,
- I_y das Flächenträgheitsmoment um die y-Achse,
- I_z das Flächenträgheitsmoment um die z-Achse,
- E der Elastizitätsmodul,
- G der Gleitmodul,
- κ_y der Korrekturfaktor zur Erfassung der Schubdeformationen in $\bar{y}$-Richtung und
- κ_z der Korrekturfaktor zur Erfassung der Schubdeformationen in $\bar{z}$-Richtung.

Die Korrekturfaktoren κ_y zur Erfassung der Schubdeformationen sind für verschiedene Querschnittsformen in Tafel 5.1 zusammengestellt; κ_z ist entsprechend festgelegt.

Querschnittsform	κ_y
▨ ($\bar{y}$, $\bar{z}$)	6/5
●	4/3
I (Normal) I (Breitflansch) T [	$\approx \dfrac{A}{A_{Steg}}$

Tafel 5.1

Durch Einsetzen von (5.7) in (5.8) und Berechnung der Integrale erhält man:

$$f_{11} = \ell/(EA)\,, \quad f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{15} = f_{16} = 0\,,$$

$$f_{22} = \kappa_y \ell/(GA) + \ell^3/(3EI_z)\,, \quad f_{23} = f_{24} = f_{25} = 0\,,$$

$$f_{26} = \ell^2/(2EI_z)\,,$$

$$f_{33} = \kappa_z \ell/(GA) + \ell^3/(3EI_y)\,, \quad f_{34} = f_{36} = 0\,,$$

$$f_{35} = -\ell^2/(2EI_y)\,,$$

$$f_{44} = \ell/(GI_T)\,, \quad f_{45} = f_{46} = 0\,,$$

$$f_{55} = \ell/(EI_y)\,, \quad f_{56} = 0\,,$$

$$f_{66} = \ell/(EI_z)\,.$$

Damit sind die Elemente der Flexibilitätsmatrix bekannt:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell/(EA) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \kappa_y\ell/(GA) + \ell^3/(3EI_z) & 0 & 0 & 0 & \ell^2/(2EI_z) \\ & & \kappa_z\ell/(GA) + \ell^3/(3EI_y) & 0 & -\ell^2/(2EI_y) & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & \ell/(GI_T) & 0 & 0 \\ & & & & \ell/(EI_y) & 0 \\ & & & & & \ell/(EI_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Die Symmetrie von $\underline{f}^i$ ist aus der Vertauschbarkeit der Indizes j und k in (5.8) ersichtlich. Es gilt (siehe auch Abschnitt 8.2):

$$f^i_{jk} = f^i_{kj}\,. \tag{5.10}$$

In den Lehrbüchern der Baustatik werden die Elemente f^i_{jk} üblicherweise als Verschiebungsgrößen (δ_{ik}-Zahlen) bezeichnet /28/.

Im allgemeinen ist bei schlanken Stäben

$$\kappa_y/(GA) \ll \ell^2/(3EI_z) \quad \text{und} \quad \kappa_z/(GA) \ll \ell^2/(3EI_y)\,.$$

In diesen Fällen kann der Einfluß der Querkraft auf die Verformungen vernachlässigt werden. In (5.9) wird dann $\kappa_y = 0$ oder/und $\kappa_z = 0$ gesetzt.

Der zweite Weg zur Berechnung der Komponenten der Flexibilitätsmatrix geht aus von den Differentialgleichungen des Balkens für Biegung mit Querkraft und Normalkraft und von der Differentialgleichung der St. Venant'schen Torsion.
Den Schnittgrößen werden in den Elementen die Verformungen als Funktionen der Stabachse $\bar{x}$ zugeordnet. Zur Normalkraft $N(\bar{x})$ korrespondiert die Längenänderung $u_x(\bar{x})$, zu $Q_y(\bar{x})$ die Durchbiegung $w_y(\bar{x})$ in $\bar{y}$-Richtung, zu $Q_z(\bar{x})$ die Durchbiegung $w_z(\bar{x})$ in $\bar{z}$-Richtung, zu $M_x(\bar{x})$ die Verdrillung ϑ_x um die $\bar{x}$-Achse, zu $M_y(\bar{x})$ die Verdrehung $\varphi_y(\bar{x})$ um die $\bar{y}$-Achse und zu $M_z(\bar{x})$ die Verdrehung $\varphi_z(\bar{x})$ um die $\bar{z}$-Achse .
Die Durchbiegungen w_y und w_z werden als Summe der Einzeldurchbiegungen infolge von Querkraft (w_{yQ}, w_{zQ}) und Biegemoment (w_{yM}, w_{zM}) dargestellt:

$$w_y = w_{yQ} + w_{yM}$$

$$w_z = w_{zQ} + w_{zM} \, .$$

Die Verdrillung erfolgt um die Schubmittelpunktsachse.
Die linear unabhängigen Elementverformungen v_i sind die Stützstellen (Randwerte) der Verformungen des Elementes.

Für diese Verformungen sind die vollständigen Differentialgleichungen mit den Vereinbarungen $(\ldots)' = \frac{d(\ldots)}{d\bar{x}}$ und $(\ldots)'' = \frac{d^2(\ldots)}{d\bar{x}^2}$ für konstante Querschnitte im folgenden angegeben:

Längenänderung u_x: $u_x'(\bar{x}) = N(\bar{x})/(EA)$;

Durchbiegung w_{yQ} : $w_{yQ}'''(\bar{x}) = \kappa_y Q_y(\bar{x})/(GA)$;

$$
\begin{aligned}
&\text{Durchbiegung } w_{zQ} &:\quad & w'''_{zQ}(\bar{x}) &=\ & \kappa_z Q_z(\bar{x})/(GA)\ ;\\
&\text{Verdrillung } \vartheta_x &:\quad & \vartheta'_x(\bar{x}) &=\ & M_x(\bar{x})/(GI_T)\ ;\\
&\text{Durchbiegung } w_{zM} &:\quad & w''_{zM}(\bar{x}) &=\ & -M_y(\bar{x})/(EI_y)\ ;\\
&\text{Durchbiegung } w_{yM} &:\quad & w''_{yM}(\bar{x}) &=\ & M_z(\bar{x})/(EI_z)\ ;\\
&\text{Verdrehung } \varphi_y &:\quad & \varphi_y(\bar{x}) &=\ & -w'_{zM}(\bar{x})\ ;\\
&\text{Verdrehung } \varphi_z &:\quad & \varphi_z(\bar{x}) &=\ & w'_{yM}(\bar{x})\ .
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Mit den Schnittgrößen infolge F_1^i, F_2^i, ..., F_6^i aus Beispiel 5.1 ergibt sich durch Integration der Differentialgleichungen die in Beispiel 5.1 berechnete Flexibilitätsmatrix. Dies wird im folgenden an einem Beispiel gezeigt.

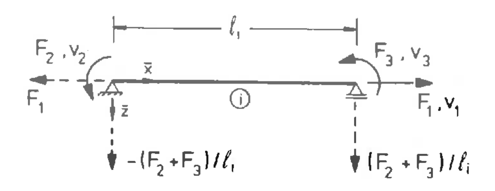


Bild 5.3 Ebenes Stabelement Typ-a

Beispiel 5.2:

Für das in Bild 5.3 dargestellte ebene Stabelement ist die Flexibilitätsmatrix für $\kappa_y = \kappa_z = 0$ mit den Differentialgleichungen der Balkentheorie zu bestimmen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Schnittgrößen (zur Abkürzung $\ell \equiv \ell_i$):

$$N(x) = F_1 \quad \text{und}$$

$$M(\bar{x}) = -F_2 + (F_2+F_3)\bar{x}/\ell \ .$$

Die Differentialgleichungen für den ebenen Balken sind

$$u'_x(\bar{x}) = F_1/(EA) \quad \text{und}$$

$$w''_z(\bar{x}) = (F_2 - (F_2+F_3)\bar{x}/\ell)/(EI_y)\ ,$$

mit den Randbedingungen

$$u_x(0) = 0,$$
$$w_z(0) = 0 \quad \text{und}$$
$$w_z(\ell) = 0 .$$

Durch Integration der Differentialgleichungen ergeben sich mit diesen Randbedingungen die Funktionen für die Längenänderung und die Durchbiegung:

$$u_x(\bar{x}) = F_1\bar{x}/(EA) ,$$
$$w_z(\bar{x}) = (F_2\bar{x}^2/2-(F_2+F_3)\bar{x}^3/(6\ell)-F_2\ell\bar{x}/3+F_3\ell\bar{x}/6)/(EI_y) ,$$
$$w_z'(\bar{x}) = (F_2\bar{x}-(F_2+F_3)\bar{x}^2/(2\ell)-F_2\ell/3+F_3\ell/6)/(EI_y) .$$

Durch Einsetzen der Koordinaten der Randpunkte erhält man:

$$v_1 \equiv u_x(\ell) = F_1\ell/(EA) ,$$
$$v_2 \equiv -w_z'(0) = (F_2\ell/3-F_3\ell/6)/(EI_y) ,$$
$$v_3 \equiv -w_z'(\ell) = (-F_2\ell/6+F_3\ell/3)/(EI_y) .$$

Diese Gleichungen werden in Matrizenform zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell/(EA) & 0 & 0 \\ 0 & \ell/(3EI_y) & -\ell/(6EI_y) \\ 0 & -\ell/(6EI_y) & \ell/(3EI_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Damit ist die Flexibilitätsmatrix bekannt.
Mit demselben Verfahren können die im Anhang A3 zusammengestellten Flexibilitätsmatrizen ermittelt werden.

5.2 Grundsätzliche Verformungsbeziehungen

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt für ein Element des Tragwerkes; es gilt aber auch für das gesamte Tragwerk.

Für virtuelle innere Kräfte $\hat{\underline{F}}$ und virtuelle äußere Kräfte $\hat{\underline{R}}$ erhält man:

$$\hat{\underline{F}}^T\underline{v} = \hat{\underline{R}}^T\underline{r} \, .$$

Durch Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen (4.18) folgt:

$$\hat{\underline{F}}^T\underline{v} = (\underline{a}^T\hat{\underline{F}})^T\underline{r}$$

oder $$\hat{\underline{F}}^T(\underline{v} - \underline{a}\,\underline{r}) = 0 \, .$$

Für die virtuellen Kräfte gilt

$$\hat{\underline{F}} \neq \underline{0} \, .$$

Deshalb ergibt sich für die Verformungen

$$\underline{v} = \underline{a}\,\underline{r} \, . \qquad (5.12)$$

Durch Vergleich mit (4.18)

$$\underline{R} = \underline{a}^T\underline{F}$$

erkennt man, daß sich Kraft- und Verformungsgrößen auf spezielle Weise transformieren. Dieses Transformationsverhalten bezeichnet man als *kontragredient*.

Die Beziehung (5.12) zwischen Knotenverformungen $\underline{r}$ und linear unabhängigen Elementverformungen $\underline{v}$ bezeichnet man als *kinematische Verträglichkeit*.

Analog lassen sich mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit die Transformationen von $\bar{\underline{u}} \to \underline{v}$, $\underline{u} \to \bar{\underline{u}}$, $\underline{u} \to \underline{v}$ und $\underline{r} \to \underline{u}$ zeigen;

aus (3.3): $\underline{T}^i\,\underline{F}^i = \bar{\underline{S}}^i$ folgt $\underline{v}^i = (\underline{T}^i)^T\bar{\underline{u}}^i$; (5.13)

(3.4): $\underline{L}_D{}^i\,\bar{\underline{S}}^i = \underline{S}^i$ ... $\bar{\underline{u}}^i = (\underline{L}_D{}^i)^T\underline{u}^i$; (5.14)

(3.9): $(\underline{a}^i)^T\underline{F}^i = \underline{S}^i$ ... $\underline{v}^i = \underline{a}^i\,\underline{u}^i$; (5.15)

(4.19): $\underline{C}\,\underline{S} = \underline{R}$ ... $\underline{u} = \underline{C}^T\,\underline{r}$. (5.16)

5.3 Verformungen statisch bestimmter Stabwerke

Bei statisch bestimmten Tragwerken ist die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ quadratisch und nichtsingulär (siehe Abschnitt 4.8). Deshalb können die Stabendkräfte $\underline{F}$ aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Gleichung (5.4) gilt nur für ein Element; als Kraft - Verformungsbeziehungen für das Gesamttragwerk erhält man:

$$\underline{v} = \underline{f}\ \underline{F} \tag{5.17}$$

$$\text{mit} \quad \underline{f} = \text{diag}\ \{\underline{f}^i\} \ . \tag{5.18}$$

Durch Einsetzen von (5.12) ergibt sich:

$$\underline{a}\ \underline{r} = \underline{f}\ \underline{F} \ . \tag{5.19}$$

Damit lassen sich die Knotenverformungen $\underline{r}$ statisch bestimmter Systeme berechnen:

$$\underline{r} = \underline{a}^{-1}\ \underline{f}\ \underline{F} \ .$$

Die Stabkräfte $\underline{F}$ sind hierbei die Lösung von (4.18).

Beispiel 5.3:
Für den in Bild 5.4 dargestellten Rahmen sollen die Verformungen der Knoten berechnet werden.

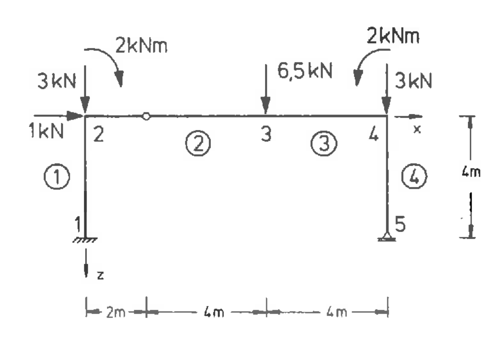


Bild 5.4 Rahmen

Flächenträgheitsmoment
$I_y = 3 \cdot 10^{-4}\ m^4$

Querschnittsfläche
$A = 0{,}012\ m^2$

Elastizitätsmodul
$E = 2{,}1 \cdot 10^8\ kN/m^2$

Die Schnittgrößen des Rahmens sind aus Beispiel 4.5 bekannt.

Wir übernehmen die Gleichgewichtsmatrix aus diesem Beispiel:

$$\underline{a}^T = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & & \underline{0} & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\
 & \underline{0} & & 0 & 0{,}5 & 0 & -1 & 0 & & \underline{0} & \\
 & & & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \underline{0} & & & \underline{0} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\
\hline
 & \underline{0} & & & \underline{0} & & \underline{0} & & 0 & -1 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Mit dem Lastvektor (Bild 5.4)

$$\underline{R}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 0 & 6{,}5 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ergibt die Lösung der Gleichgewichtsgleichungen:

$$\underline{F}^T = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc} -6{,}5 & 1 & -9 & 0 & 7 & 0 & -3 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die Stabelemente (1), (3) und (4) sind vom Typ-b (Beispiel 4.5); Element (2) hat im Innern ein Gelenk. Die Flexibilitätsmatrizen dieser Elemente werden dem Anhang A3 entnommen:

$$\underline{f}^1 = \underline{f}^3 = \underline{f}^4 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1{,}5873 & 0 & 0 \\ 0 & 338{,}6243 & -126{,}9841 \\ 0 & -126{,}9841 & 63{,}4921 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^2 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 2{,}3810 & 0 \\ 0 & 95{,}2381 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f} = \text{diag}\,\{\underline{f}^i\} .$$

Für die Lösung des Gleichungssystems (5.19) $\underline{a}\,\underline{r} = \underline{f}\,\underline{F}$ verwenden wir das Matrizeninterpretationssystem SMIS /37/.

Die Eingabe sieht folgendermaßen aus:

```
LOAD   F1 = AT   N1 = 11   N2 = 11
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{a}^T$.

```
LOAD   F1 = KF   N1 = 11   N2 = 11
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{f}$.

```
LOAD   F1 = F    N1 = 11   N2 =  1
:
```

Es folgen die Elemente des Vektors $\underline{F}$.

```
MULT   F1 = KF   F2 = F    F3 = FF
```

Das Ergebnis der Multiplikation $\underline{f}\,\underline{F}$ wird in FF gespeichert.

```
TRANS  F1 = AT   F2 = A
```

Die Matrix $\underline{a}^T$ wird transponiert und in A gespeichert.

```
SOLVE  F1 = A    F2 = FF
PRINT  F1 = FF
```

Es werden die Knotenverformungen $\underline{r}$ ausgegeben:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} 148{,}148 \\ 1{,}032 \\ -69{,}841 \\ \hline 148{,}148 \\ 200{,}992 \\ 18{,}264 \\ \hline 148{,}148 \\ 0{,}952 \\ 69{,}058 \\ \hline 424{,}378 \\ 69{,}058 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{bmatrix} r_{2_x} \\ r_{2_z} \\ \theta_2 \\ \hline r_{3_x} \\ r_{3_z} \\ \theta_3 \\ \hline r_{4_x} \\ r_{4_z} \\ \theta_4 \\ \hline r_{5_x} \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

Dimension [rad, m].

Die Verformungsfigur kann damit qualitativ gezeichnet werden; sie ist in Bild 5.5 dargestellt.

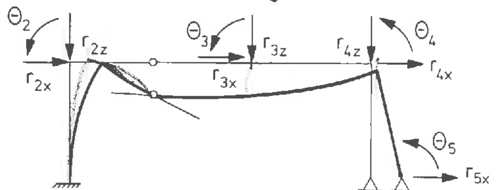


Bild 5.5 Qualitative Verformungsfigur

5.4 Ermittlung der Biegelinie aus den Knotenverformungen

Benötigt man die Verformungen nicht nur in den Knotenpunkten des Tragwerkes, sondern als Funktion der lokalen Koordinaten $\overline{x}$, so ist die Biegelinie zu berechnen.
Alle Elemente sind zwischen den Knoten unbelastet; die Biegelinie eines Elementes ist deshalb eine Funktion dritter Ordnung von $\overline{x}$.
In Bild 5.6 ist die Biegelinie eines ebenen Stabelementes dargestellt. Der Einfluß der Normalverformungen wird in der elementaren Balkenbiegelehre vernachlässigt.

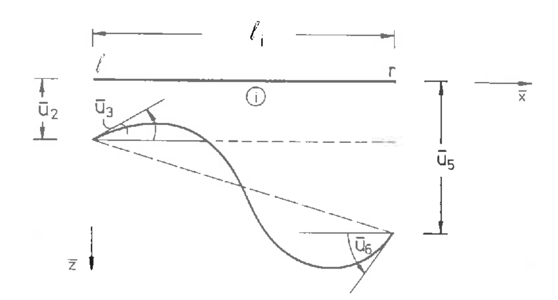


Bild 5.6 Element mit Stabendverformungen

Die Biegelinie für ein unbelastetes Stabelement ist mit der Vereinbarung $w_z(\overline{x}) \equiv w(\overline{x})$:

$$w(\overline{x}) = C_1\overline{x}^3 + C_2\overline{x}^2 + C_3\overline{x} + C_4 , \qquad (5.20)$$

$$C_1, \ldots, C_4 = \text{konstant} .$$

Mit den Randbedingungen

$$w(0) = \overline{u}_2 \;, \qquad w(\ell_i) = \overline{u}_5 \;,$$
$$-w'(0) = \overline{u}_3 \text{ und } -w'(\ell_i) = \overline{u}_6 \tag{5.21}$$

ergeben sich die Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 zu:

$$C_1 = (2(\overline{u}_2 - \overline{u}_5) - (\overline{u}_3 + \overline{u}_6)\ell_i)/\ell_i^3 \;,$$
$$C_2 = (\overline{u}_3 - \overline{u}_6)/(2\ell_i) - 1{,}5\; C_1\; \ell_i \;,$$
$$C_3 = -\overline{u}_3 \;, \tag{5.22}$$
$$C_4 = \overline{u}_2 \;.$$

Die Elementverformungen $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$, $\overline{u}_5$ und $\overline{u}_6$ werden mit Gleichung (5.16) und (5.14) aus den Knotenverformungen berechnet. Die Verformungen in Stablängsachse werden für die Funktion der Biegelinie vernachlässigt, sie gehen allein als Anfangs- und Endwerte der lokalen Koordinaten $\overline{x}$ ein. Für andere Elemente lassen sich die Biegelinien analog ableiten.

Beispiel 5.4:
Für das in Beispiel 4.5 und 5.3 berechnete Rahmentragwerk soll die Biegelinie im Element (1) aus den Knotenverformungen berechnet werden.

Die Elementverformungen in lokalen Koordinaten werden aus den Knotenverformungen berechnet:

$$\overline{u}_2 = 0; \quad \overline{u}_3 = 0; \quad \overline{u}_5 = 1{,}481 \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad \overline{u}_6 = -0{,}698 \cdot 10^{-3}.$$

Die Konstanten C_1 bis C_4 ergeben sich aus (5.22) zu:

$$C_1 = (-2 \cdot 1{,}481 \cdot 10^{-3} + 0{,}698 \cdot 10^{-3} \cdot 4)/64 = -0{,}2656 \cdot 10^{-5},$$

$$C_2 = 0{,}698 \cdot 10^{-3}/8 + 0{,}2656 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 0{,}1032 \cdot 10^{-3},$$

$C_3 = 0$ und $C_4 = 0$.

Damit erhält man die Biegelinie:

$$w_1(\bar{x}) = (-0{,}2656\ \bar{x}^3 + 10{,}32\ \bar{x}^2)10^{-5} \quad [m] .$$

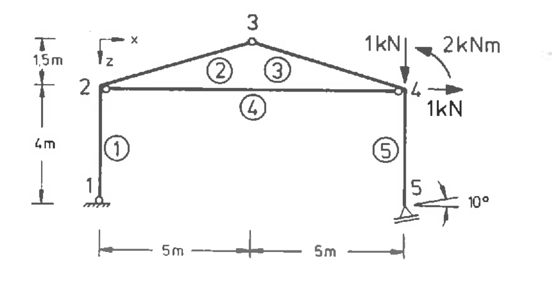
Für die Elemente mit Gelenk im Innern gelten die Gleichungen (5.20) bis (5.22) nicht. Die Biegelinie kann jedoch mit der zusätzlichen Bedingung, daß das Moment im Gelenk Null ist, berechnet werden.

Aufgaben:

5.1 Für ein Fachwerkelement und ein Stabelement mit Gelenk im Innern sind die Flexibilitätsmatrizen nach einem der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Verfahren zu berechnen und mit den im Anhang A3 angegebenen Matrizen zu vergleichen.

5.2 Für ein Stabelement mit Querkraftgelenk im Innern berechne man die Elementflexibilitätsmatrix (siehe Aufgabe 3.2).

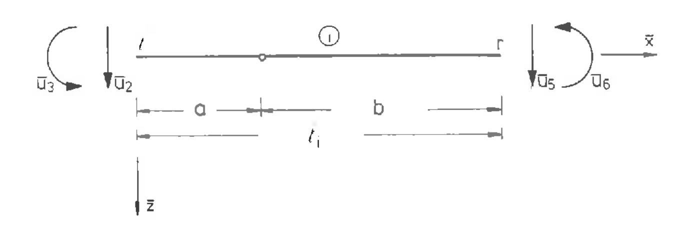
5.3 Für das dargestellte Rahmensystem berechne man die Knotenverformungen und stelle qualitativ die Verformungsfigur dar (siehe Aufgabe 4.2 (b)).



$EI_y = 5 \cdot 10^3$ kNm^2

$EA = 10^6$ kN

5.4 Für das Stabelement mit Momentengelenk im Innern ist die Funktion der Biegelinie aufzustellen.



Die Momentenbedingung lautet:

$$M(\bar{x}=a) = -EI_y w''(\bar{x}=a) = 0 \ .$$

6 Das Weggrößenverfahren

Mit den Matrizengleichungen der vorangehenden Kapitel wird im folgenden eine eindeutige, lineare Gleichung zur Berechnung der Knotenverformungen (Weggrößen) aus den Knotenlasten abgeleitet. Diese Gleichung ist die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens (Verschiebungsmethode); sie gilt für allgemeine Tragwerke.

Das Verfahren wird als Weggrößenverfahren bezeichnet, weil zuerst die unbekannten Weggrößen berechnet werden. In einem zweiten Schritt folgt dann die Berechnung der unbekannten Kraftgrößen.

6.1 Die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens

Die Ausgangsgleichung für die Darstellung des Weggrößenverfahrens ist die Bestimmungsgleichung für die Verformungen eines Elementes (i), (5.4):

$$\underline{v}^i = \underline{f}^i \, \underline{F}^i \, .$$

Die Flexibilitätsmatrix $\underline{f}^i$ ist eine nichtsinguläre Matrix, d.h. es gilt auch die inverse Beziehung:

$$\underline{F}^i = \underline{k}_r^i \, \underline{v}^i \, , \qquad (6.1)$$

$$\text{mit} \quad \underline{k}_r^i = (\underline{f}^i)^{-1} \, .$$

$\underline{k}_r^i$ wird als *reduzierte Elementsteifigkeitsmatrix* bezeichnet. Die reduzierten Elementsteifigkeitsmatrizen für die bisher eingeführten Stabelemente sind im Anhang A3 zusammengestellt. Die Matrix $\underline{k}_r^i$ ist nichtsingulär ("reduziert"). Bei allgemeinen Tragwerken ist es üblich, von der vollständigen (singulären) Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ auszugehen, die über die Formänderungsarbeit eines Elementes mit dem Satz von Castigliano /39/ abgeleitet werden kann. Diesen Weg werden wir an späterer Stelle (Kapitel 13) darstellen.

Zur weiteren Ableitung des Weggrößenverfahrens wird (6.1) für das Gesamtsystem formuliert:

$$\underline{F} = \underline{k}_r \, \underline{v} \tag{6.2}$$

$$\text{mit} \qquad \underline{k}_r = \text{diag}\,\{\underline{k}_r^i\} \; .$$

$\underline{F}$ ist der aus $\underline{F}^i$ gebildete Vektor aller linear unabhängigen Stabendkräfte, $\underline{v}$ sind die zugehörigen Elementverformungen und $\underline{k}_r$ ist die aus $\underline{k}_r^i$ gebildete, symmetrische Diagonalmatrix der Elementsteifigkeiten.
Die Gleichung (6.2) beschreibt das *Elastizitätsgesetz* der Elemente des Tragwerkes, sie ist umkehrbar eindeutig (nichtsingulär).
Die zweite wesentliche Gleichung ist die kinematische Verträglichkeit (5.12) von Knoten- und Elementverformungen

$$\underline{v} = \underline{a} \; \underline{r} \; .$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (6.2) erhält man:

$$\underline{F} = \underline{k}_r \, \underline{a} \; \underline{r} \tag{6.3}$$

Diese Gleichung wird an späterer Stelle für die Berechnung der Stabendkräfte $\underline{F}$ aus den Knotenverformungen $\underline{r}$ benötigt. Die linear unabhängigen Stabendkräfte müssen die Gleichgewichtsbedingungen (4.18)

$$\underline{a}^T \, \underline{F} = \underline{R}$$

erfüllen. Die *Grundgleichung des Weggrößenverfahrens* erhält man durch Einsetzen von Gleichung (6.3) in die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\underline{a}^T \, \underline{k}_r \, \underline{a} \; \underline{r} = \underline{R} \tag{6.4}$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzt man üblicherweise

$$\underline{a}^T \, \underline{k}_r \, \underline{a} = \underline{K} \tag{6.5}$$

und erhält damit für die Grundgleichung:

$$\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R}\,. \tag{6.6}$$

$\underline{K}$ ist die *Steifigkeitsmatrix des Gesamttragwerkes (Gesamtsteifigkeitsmatrix)*. Aufgrund der Symmetrie von $\underline{k}_r$ ergibt sich eine symmetrische Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$. Gleichung (6.6) ist eine eindeutige Beziehung zwischen den unbekannten Knotenverformungen und den bekannten Knotenlasten, d.h. unabhängig von der Redundanz des Tragwerkes erhält man die unbekannten Knotenverformungen $\underline{r}$ als Lösung des linearen Gleichungssystemes (6.6). Für das Lösungsverfahren selbst sind einige Vorüberlegungen erforderlich.
Die Flexibilitätsmatrizen $\underline{f}^i$ und die reduzierten Steifigkeitsmatrizen $\underline{k}_r^i$ sind positiv definit /95/. Die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ besitzt linear unabhängige Zeilen. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt (siehe /95/, Seite 130), daß auch das Produkt

$$\underline{a}^T\,\underline{k}_r\,\underline{a}\,,$$

und damit die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$, positiv definit ist.
Damit kann die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens mit dem *Verfahren von Cholesky* (Anhang A2.1), das eine positiv definite Koeffizientenmatrix voraussetzt, gelöst werden.
Bei diesem Verfahren wird die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ zunächst als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix dargestellt (Dreieckszerlegung). Dieser erste Schritt des Cholesky-Verfahrens erfordert den größten Anteil an Rechenaufwand bei der Lösung des Gleichungssystemes. In einem zweiten Schritt wird die Lösung auf der Grundlage der Dreieckszerlegung mit relativ geringem Aufwand berechnet (Vorwärtseinsetzen/Rückwärtseinsetzen).
Dies bedeutet aber, daß erst im zweiten Schritt des Lösungsverfahrens die rechte Seite $\underline{R}$ benötigt wird. Das Verfahren ist damit besonders gut geeignet für Gleichungssysteme mit mehreren rechten Seiten, d.h. insbesondere auch

für die Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens für mehrere Lastvektoren $\underline{R}$ (mehrere Lastfälle).
Da sich das Tragwerk in allen Größen linear verhält (siehe Abschnitt 3.1 und Kapitel 5), gilt das Superpositionsprinzip:

Satz 6.1: *In einem linearen Tragwerk sind alle Kraft- und Verformungsgrößen linear von der Belastung abhängig.*
Die Summe der Schnittgrößen (Verformungen) infolge mehrerer einzelner Lastfälle ist gleich den Schnittgrößen (Verformungen), die unter der Summe der Lastfälle entstehen.

Dieser Sachverhalt ist in Bild 6.1 angedeutet.

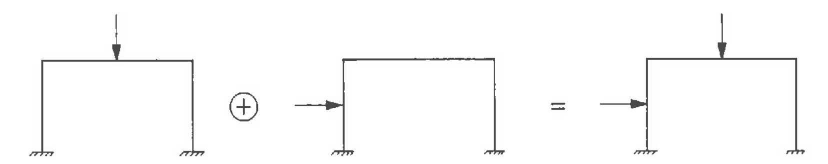


Bild 6.1 Superpositionsprinzip (lineare Tragwerke)

Das Superpositionsprinzip kann auch bei der Lösung der Gleichgewichtsbedingungen (4.18) angewendet werden.
Mit $\underline{r}$ als Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens können die linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ berechnet werden. Mit der Lösung $\underline{r}$ ergibt sich (vgl. (6.3)):

$$\underline{F} = \underline{k}_r \; \underline{a} \; \underline{r} \; .$$

Den Vektor der vollständigen Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ erhält man damit aus (3.3) zu:

$$\underline{\bar{S}}^i = \underline{T}^i \; \underline{F}^i \; .$$

Die Stabendkräfte sind die Grundlage der Spannungsnachweise für die Elemente: An einem unbelasteten Element stimmen sie am "rechten" Stabende mit den Schnittgrößen überein, am "linken" Stabende sind die Stabendgrößen die negativen Schnittgrößen (Definition 4.5).

Die Berechnung eines Stabtragwerkes nach dem Weggrößenverfahren ist damit vollständig beschrieben. Einen Überblick über die erforderlichen Einzelschritte gibt die folgende *Zusammenfassung der Berechnung nach dem Weggrößenverfahren:*

(1) Besetzung der Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$;

(2) Besetzung der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r$;

(3) Berechnung der Matrizenprodukte $\underline{k}_r\ \underline{a}$ und $\underline{a}^T\ \underline{k}_r\ \underline{a} = \underline{K}$;

(4) Dreieckszerlegung von $\underline{K}$ (Cholesky);

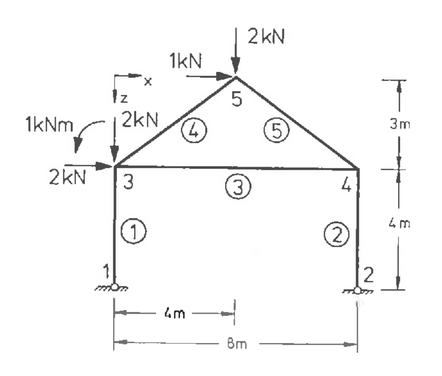
(5) Besetzung des Lastvektors $\underline{R}$;

(6) Berechnung der Lösung $\underline{r}$ von $\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}$ (Cholesky);

(7) Berechnung von $\underline{F} = \underline{k}_r\ \underline{a}\ \underline{r}$;

(8) Berechnung der Stabendkräfte $\underline{\overline{S}}^i = \underline{T}^i\ \underline{F}^i$.

Für den ersten Lastfall $\underline{R}$ müssen alle Einzelschritte der Berechnung von (1) bis (8) durchgeführt werden, für zusätzliche Lastfälle wird bei (5) begonnen.
Die Elementmatrizen $(\underline{a}^i)^T$, $\underline{k}_r^i$ und $\underline{T}^i$ sind für jedes Element im Anhang A3 zusammengestellt. Für den Aufbau der Matrizen für das gesamte Tragwerk verwenden wir SMIS /37/.
Im folgenden wird das Weggrößenverfahren an einem einfachen Beispiel (Bild 6.2) dargestellt.



$EI_y = 5 \cdot 10^3\ kNm^2$

$EA = 10^6\ kN$

Bild 6.2 Ebener Rahmen

Beispiel 6.1:

Aus dem Elementkatalog (Anhang A3) wird das Stabelement Typ-a für die Elemente ① bis ⑤ gewählt (Bild 6.2).
Mit der Koordinaten- und Verknüpfungstafel können die Elementgleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$ aufgestellt werden.

Koordinatentafel

Knoten	x [m]	z
1	0	7
2	8	7
3	0	3
4	8	3
5	4	0

Verknüpfungstafel

Element	Knoten ℓ	Knoten r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	3	4	0	-1
②	2	4	4	0	-1
③	3	4	8	1	0
④	3	5	5	4/5	-3/5
⑤	4	5	5	-4/5	-3/5

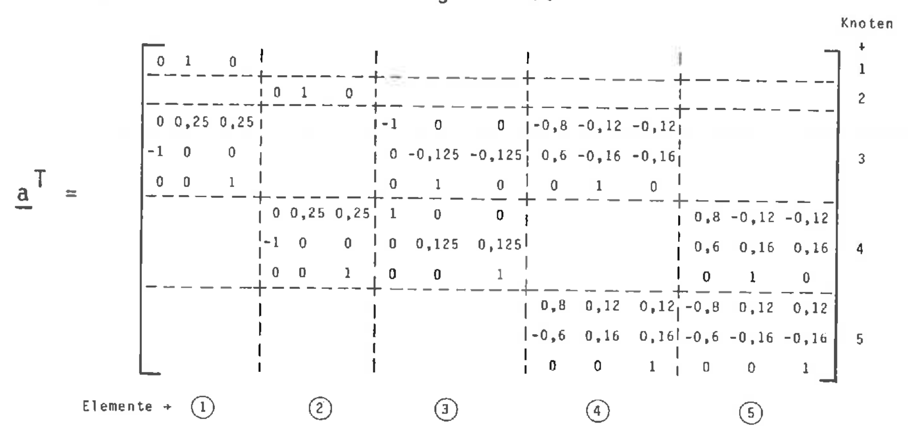
$$\cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \;;\quad \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$$

Gleichgewichtsmatrizen der Elemente $(\underline{a}^i)^T$:

$$(\underline{a}^1)^T = (\underline{a}^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\underline{a}^3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}125 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

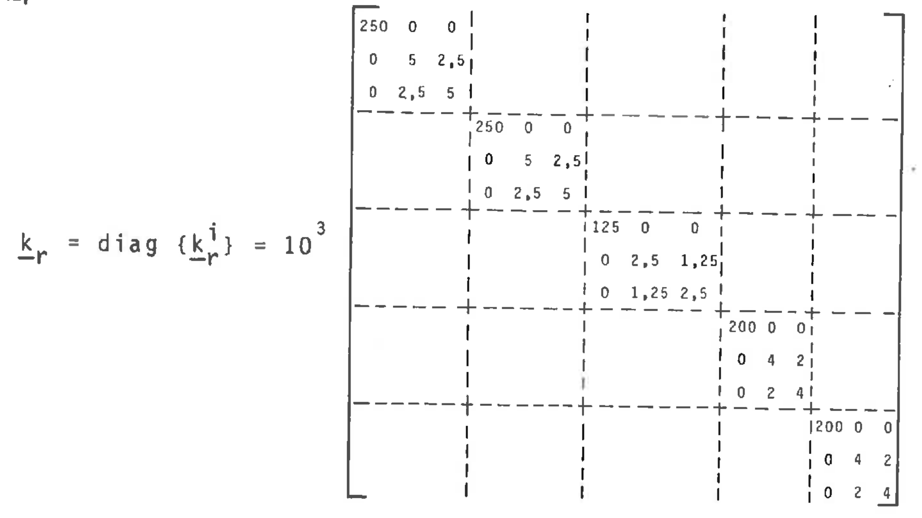
$$(\underline{a}^4)^T = \begin{bmatrix} -0{,}8 & -0{,}12 & -0{,}12 \\ 0{,}6 & -0{,}16 & -0{,}16 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ -0{,}6 & 0{,}16 & 0{,}16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\underline{a}^5)^T = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}12 & -0{,}12 \\ 0{,}6 & 0{,}16 & 0{,}16 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ -0{,}6 & -0{,}16 & -0{,}16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichgewichtsmatrix des Tragwerkes:



$$\underline{a}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ \hline
0 & 0{,}25 & 0{,}25 & & & & -1 & 0 & 0 & -0{,}8 & -0{,}12 & -0{,}12 & & & \\
-1 & 0 & 0 & & & & 0 & -0{,}125 & -0{,}125 & 0{,}6 & -0{,}16 & -0{,}16 & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline
 & & & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 1 & 0 & 0 & & & & 0{,}8 & -0{,}12 & -0{,}12 \\
 & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}125 & 0{,}125 & & & & 0{,}6 & 0{,}16 & 0{,}16 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & 0 \\ \hline
 & & & & & & & & & 0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}12 & -0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}12 \\
 & & & & & & & & & -0{,}6 & 0{,}16 & 0{,}16 & -0{,}6 & -0{,}16 & -0{,}16 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Hyperdiagonalmatrix der reduzierten Steifigkeitsmatrizen $\underline{k}_r^i$:



$$\underline{k}_r = \text{diag}\,\{\underline{k}_r^i\} = 10^3 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
250 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 5 & 2{,}5 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 2{,}5 & 5 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 250 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 5 & 2{,}5 & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 2{,}5 & 5 & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & 125 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 2{,}5 & 1{,}25 & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 1{,}25 & 2{,}5 & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & 200 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 4 & 2 & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 2 & 4 & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & 200 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 4 & 2 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 2 & 4
\end{array}\right]$$

Lastvektor: $\underline{R}^T = \left[0 \mid 0 \mid 2 \quad 2 \quad 1 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1 \quad 2 \quad 0\right]$

Für die Lösung des Gleichungssystems verwenden wir das Matrizeninterpretationssystem SMIS /37/.

Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt.

```
LOAD   F1 = AT   N1 = 11   N2 = 15
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{a}^T$.

```
LOAD   F1 = KR   N1 = 15   N2 = 15
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{k}_r$.

```
TRANS  F1 = AT   F2 = A
```

Es wird $\underline{a}$ gebildet.

```
MULT   F1 = KR   F2 = A    F3 = KA
```

Es entsteht die Matrix KA = $\underline{k}_r\underline{a}$.

```
MULT   F1 = AT   F2 = KA   F3 = K
```

Es entsteht die Matrix $\underline{K} = \underline{a}^T\underline{k}_r\underline{a}$.

```
LOAD   F1 = R    N1 = 11   N2 = 1
  :
```

Es folgen die Elemente des Lastvektors.

```
SOLVE  F1 = K    F2 = R
PRINT  F1 = R
```

Das Gleichungssystem wird gelöst, und die Knotenverformungen $\underline{r}$ werden ausgegeben.

```
MULT   F1 = KA   F2 = R    F3 = F
```

Mit der Multiplikation $\underline{k}_r\underline{a}\ \underline{r} = \underline{F}$ werden die linear unabhängigen Stabendkräfte berechnet.

Knotenverformungen $\underline{r}$ und Stabendkräfte $\underline{F}$:

$$\underline{r} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -3{,}243 \\ -3{,}189 \\ 9{,}663 \\ 0{,}005 \\ -0{,}762 \\ 9{,}665 \\ 0{,}011 \\ -0{,}870 \\ 9{,}672 \\ 0{,}023 \\ 0{,}406 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ r_{3x} \\ r_{3z} \\ \theta_3 \\ r_{4x} \\ r_{4z} \\ \theta_4 \\ r_{5x} \\ r_{5z} \\ \theta_5 \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} -1{,}250 \\ 0 \\ 6{,}202 \\ -2{,}750 \\ 0 \\ 5{,}798 \\ 0{,}266 \\ -2{,}989 \\ -3{,}124 \\ -0{,}581 \\ -2{,}212 \\ 0{,}123 \\ -2{,}564 \\ -2{,}674 \\ -0{,}123 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ -M_{11} \\ M_{13} \\ N_2 \\ -M_{22} \\ M_{24} \\ N_3 \\ -M_{33} \\ M_{34} \\ N_4 \\ -M_{43} \\ M_{45} \\ N_5 \\ -M_{54} \\ M_{55} \end{bmatrix}$$

Dimensionen [rad, m, kN, kNm]

Beim Stabelement Typ-a ist der $\underline{F}$-Vektor ausreichend, um die Momenten- und Normalkraft-Zustandslinien zu zeichnen. Die Zustandslinien sind in Bild 6.3 abgebildet.

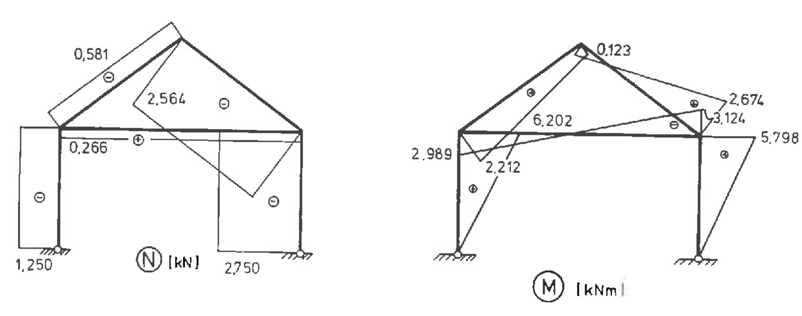


Bild 6.3 Normalkraft- und Momenten-Zustandslinien

Um die Querkräfte zu ermitteln, kann man die Transformation (3.3) auf Elementebene durchführen. Mit der 5. Zeile aus Gleichung (3.3) und der $\underline{T}^i$-Matrix aus Anhang A3 kann die Querkraft jedoch auch bestimmt werden:

$$Q_i \equiv \bar{S}_5^i = (F_2^i + F_3^i)/\ell_i \;.$$

Für dieses Beispiel ist dann

$$Q_1 = 6{,}202/4 = 1{,}551 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 5{,}798/4 = 1{,}450 \text{ kN}$$

$$Q_3 = (-2{,}989 - 3{,}124)/8 = -0{,}764 \text{ kN}$$

$$Q_4 = (-2{,}212 + 0{,}123)/5 = -0{,}418 \text{ kN}$$

$$Q_5 = (-2{,}674 - 0{,}123)/5 = -0{,}559 \text{ kN} \;.$$

In Bild 6.4 ist die Querkraft-Zustandslinie dargestellt. Über Gleichgewichtskontrollen können die Ergebnisse auf ihre Richtigkeit überprüft werden:

Gleichgewicht am Gesamttragwerk:

$\Sigma \underline{X} = 2 + 1 - 1{,}551 - 1{,}450 = -0{,}001 \approx 0$ kN ;

$\Sigma \underline{Z} = 2 + 2 - 1{,}250 - 2{,}750 = 0$ kN ;

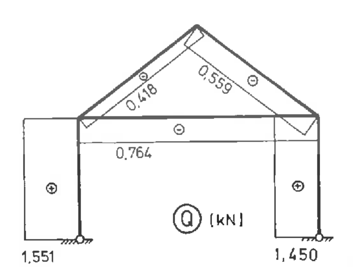


Bild 6.4 Querkraft-Zustandslinie

$$\Sigma M_1 = 1 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7 - 2 \cdot 4 + 2{,}750 \cdot 8 = 0 \quad \text{kNm} \quad .$$

Auch das Knotengleichgewicht kann überprüft werden. In Bild 6.5 ist beispielsweise der Knoten 3 mit den Schnittgrößen in ihren tatsächlichen Wirkungsrichtungen dargestellt. Für den Knoten 3 gilt:

$$\Sigma X_3 = 2 - 1{,}551 + 0{,}226 - 0{,}465 - 0{,}251 = -0{,}001 \approx 0 \quad \text{kN} \quad ;$$

$$\Sigma Z_3 = 2 - 1{,}250 - 0{,}764 + 0{,}349 - 0{,}334 = -0{,}001 \approx 0 \quad \text{kN} \quad ;$$

$$\Sigma M_3 = 1 - 6{,}202 + 2{,}989 + 2{,}212 = -0{,}001 \approx 0 \quad \text{kNm} \quad .$$

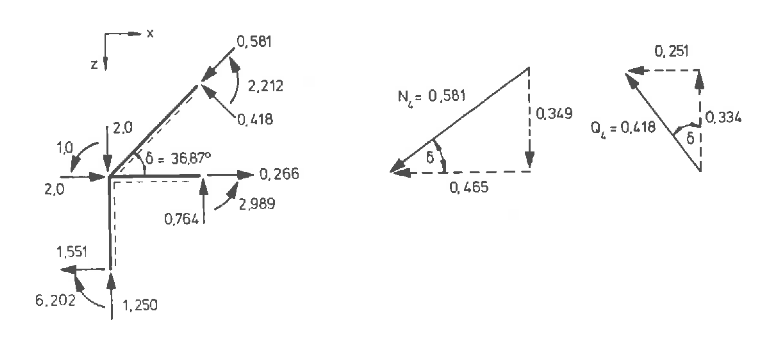


Bild 6.5 Knoten 3 mit den zugehörigen Schnittgrößen

6.2 Die direkte Steifigkeitsmethode

Die Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ aus der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r$ und der Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ ist sehr aufwendig. Die spezielle Struktur der reduzierten Steifigkeitsmatrix (Hyperdiagonalmatrix) und der Gleichgewichtsmatrix (Blockmatrix) sollte deshalb bei der Berechnung des Matrizenproduktes $\underline{a}^T\underline{k}_r\underline{a}$ berücksichtigt werden. In Bild 6.6 ist das Matrizenprodukt $\underline{a}^T\underline{k}_r\underline{a}$ als Falksches Schema (siehe Anhang A1) für ein typisches Stabtragwerk beispielhaft dargestellt.

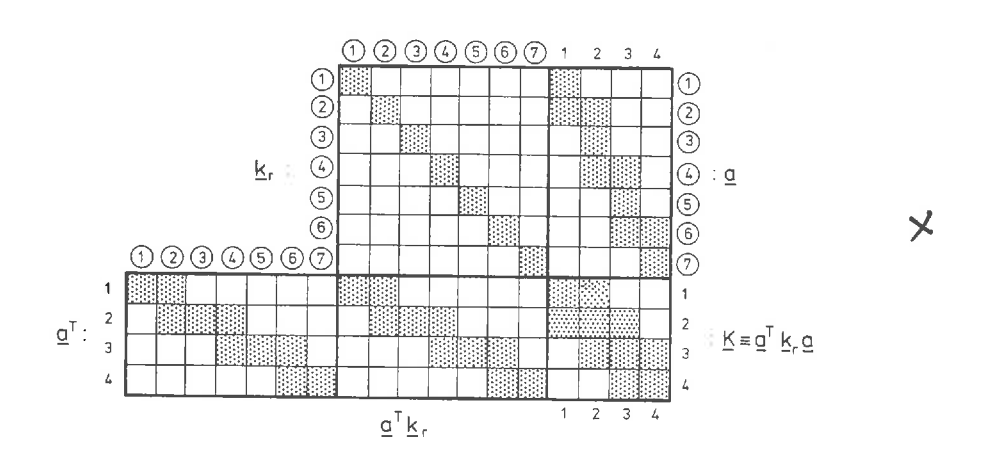


Bild 6.6 Typische Besetzung der Gleichgewichts- und der reduzierten Steifigkeitsmatrix

Dieser Gedanke führt zu der direkten Steifigkeitsmethode, einem direkten Verfahren zur Besetzung der Gesamtsteifigkeitsmatrix. Die Grundlagen des Verfahrens werden im folgenden dargestellt.

Die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ kann bekanntlich (Gleichung (4.20)) als Produkt einer (0,1)-Matrix $\underline{C}$ mit einer Diagonalmatrix diag $\{(\underline{a}^i)^T\}$ dargestellt werden; $\underline{a}^T$ ergibt sich

demnach als Blockmatrix (Bild 6.6):

$$\underline{a}^T = \underline{C}\ \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ .$$

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r$ ist eine Hyperdiagonalmatrix:

$$\underline{k}_r = \text{diag}\ \{\underline{k}_r^i\}\ .$$

Durch Substitution dieser Beziehungen in

$$\underline{a}^T\ \underline{k}_r\ \underline{a} = \underline{K}$$

erhält man:

$$\underline{C}\ \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ \text{diag}\ \{\underline{k}_r^i\}\ \text{diag}\ \{\underline{a}^i\}\ \underline{C}^T = \underline{K}\ . \qquad (6.7)$$

Das Produkt der Diagonalmatrizen ist wieder eine Diagonalmatrix:

$$\text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ \text{diag}\ \{\underline{k}_r^i\}\ \text{diag}\ \{\underline{a}^i\} = \text{diag}\ \{\underline{k}^i\}\ . \qquad (6.8)$$

Die Elemente dieser Diagonalmatrix sind die (vollständigen) *Elementsteifigkeitsmatrizen* $\underline{k}^i$. Sie ergeben sich als Produkte der Elemente der einzelnen Diagonalmatrizen:

$$\underline{k}^i = (\underline{a}^i)^T\ \underline{k}_r^i\ \underline{a}^i\ . \qquad (6.9)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}^i$ sind (im Gegensatz zu den reduzierten Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}_r^i$) *singulär*. Die Gleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$ der Elemente besitzen mehr Zeilen als Spalten, d.h. die Zeilen von $(\underline{a}^i)^T$ sind linear abhängig. Das Matrizenprodukt in (6.9) ergibt deshalb eine Matrix mit linear abhängigen Zeilen und Spalten, also eine singuläre Matrix. Die Symmetrie bleibt bei der Transformation nach (6.9), einer sogenannten *Kongruenztransformation*, erhalten: Die Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ ist wie $\underline{k}_r^i$ eine *symmetrische Matrix*.

Die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ wird für ein ebenes Stabelement dargestellt. Nach Gleichung (6.1)

erhält man die reduzierte Elementsteifigkeitsmatrix. Es wird, wie in Beispiel 5.2, ein Stabelement Typ-a verwendet:

$$\underline{k}_r^i = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 4EI_y/\ell & 2EI_y/\ell \\ 0 & 2EI_y/\ell & 4EI_y/\ell \end{bmatrix}$$

Mit der Elementgleichgewichtsmatrix $(\underline{a}^i)^T$, (siehe Anhang A3),

$$(\underline{a}^i)^T = \left[\begin{array}{ccc} -c & s/\ell & s/\ell \\ -s & -c/\ell & -c/\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline c & -s/\ell & -s/\ell \\ s & c/\ell & c/\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

erhält man für $\underline{k}^i$ nach Gleichung (6.9):

$$\underline{k}^i = \frac{2EI_y}{\ell} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6s^2/\ell^2+C_1c^2 & -6sc/\ell^2+C_1sc & 3s/\ell & -6s^2/\ell^2-C_1c^2 & 6sc/\ell^2-C_1sc & 3s/\ell \\ & 6c^2/\ell^2+C_1s^2 & -3c/\ell & 6sc/\ell^2-C_1sc & -6c^2/\ell^2-C_1s^2 & -3c/\ell \\ & & 2 & -3s/\ell & 3c/\ell & 1 \\ \hline & \text{symmetrisch} & & 6s^2/\ell^2+C_1c^2 & -6sc/\ell^2+C_1sc & -3s/\ell \\ & & & & 6c^2/\ell^2+C_1s^2 & 3c/\ell \\ & & & & & 2 \end{array}\right]$$

mit $C_1 = A/(2I_y)$, $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen für weitere Elemente sind im Anhang A3 angegeben.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ ergibt sich aus (6.7) und (6.8) zu:

$$\underline{C}\;\underline{k}\;\underline{C}^T = \underline{K} , \qquad (6.10)$$

mit $\underline{k} = \text{diag}\,\{\underline{k}^i\}$.

Durch Vergleich von (6.6) und (6.10) mit der Gleichgewichtsbedingung (4.19)

$$\underline{C}\;\underline{S} = \underline{R}$$

erhält man:

$$\underline{S} = \underline{k}\ \underline{C}^T\ \underline{r}\ . \qquad (6.11)$$

Mit der kontragredienten Transformation von (4.19),

$$\underline{u} = \underline{C}^T\ \underline{r}\ , \qquad (6.12)$$

ergibt sich

$$\underline{S} = \underline{k}\ \underline{u}\ ,$$

oder auch (6.13)

$$\underline{S}^i = \underline{k}^i\ \underline{u}^i\ .$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}^i$ sind die Transformationsmatrizen für die linear abhängigen Stabendverformungen $\underline{u}^i$.

Mit Gleichung (3.5) werden die Stabendkräfte in globalen Koordinaten in die Stabendkräfte in lokalen Koordinaten transformiert:

$$\bar{\underline{S}}^i = (\underline{L}_D{}^i)^T\ \underline{S}^i\ .$$

Damit sind die Grundlagen der direkten Steifigkeitsmethode dargestellt.

Zur Darstellung der darauf aufbauenden Rechenverfahren wird ein Tragwerk betrachtet, das m Elemente und n Freiheitsgrade der Verformung besitzt, die fortlaufend von 1 beginnend numeriert sind. Aufgrund von (6.10) und (6.12) gilt:

$$K_{pq} = \sum_{\ell=1}^{m} \tilde{k}_{ij}^{\ell} \qquad (6.14)$$

mit $\tilde{k}_{ij}^{\ell} = k_{ij}^{\ell}$ <u>wenn</u> die Stabendkraft S_i^{ℓ} zum Gleichgewicht von R_p beiträgt <u>und</u> wenn die Stabendverformung u_j^{ℓ} mit der Knotenverformung r_q übereinstimmt.

Ansonsten ist $\tilde{k}_{ij}^{\ell} = 0$. Für die Zuordnung der Elemente wird die Inzidenztafel (Kapitel 2) benutzt.

Gleichung (6.14) ist im wesentlichen nur die Berechnung der Produktmatrix $\underline{C}^T\ \underline{k}\ \underline{C}$ anhand der Inzidenztafel. Die Berech-

nung der Stabendkräfte erfolgt auf derselben Grundlage. Es gilt (6.13):

$$S_i^\ell = \sum_j k_{ij}^\ell \, u_j^\ell \,. \qquad (6.15)$$

Bei der Berechnung werden für u_j^ℓ die korrespondierenden Verformungsgrößen r_q eingesetzt, d.h. die Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens. Auch hier erfolgt die Berechnung über die Inzidenztafel und nicht durch Matrizenmultiplikation. Die Stabendkräfte $\bar{\underline{S}}^\ell$ in lokalen Koordinaten erhält man aus

$$\bar{\underline{S}}^\ell = (\underline{L}_D{}^\ell)^T \, \underline{S}^\ell \,. \qquad (6.16)$$

Beispiel 6.2:

Der Rahmen von Beispiel 6.1 wird mit der direkten Steifigkeitsmethode berechnet.

Der Lastvektor ist der gleiche wie in Beispiel 6.1:

$$\underline{R}^T = \left[0 \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 2 \quad 2 \quad 1 \;\vdots\; 0 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 1 \quad 2 \quad 0\right] .$$

Elementsteifigkeitsmatrix mit Koeffizienten:

$$\underline{k}^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11}^i & k_{12}^i & k_{13}^i & k_{14}^i & k_{15}^i & k_{16}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{23}^i & k_{24}^i & k_{25}^i & k_{26}^i \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i & k_{34}^i & k_{35}^i & k_{36}^i \\ \hline k_{41}^i & k_{42}^i & k_{43}^i & k_{44}^i & k_{45}^i & k_{46}^i \\ k_{51}^i & k_{52}^i & k_{53}^i & k_{54}^i & k_{55}^i & k_{56}^i \\ k_{61}^i & k_{62}^i & k_{63}^i & k_{64}^i & k_{65}^i & k_{66}^i \end{array}\right]$$

Die Elemente k_{ij}^ℓ entsprechen den Elementen der Steifigkeitsmatrizen des Anhang A3.

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$\underline{K}$ =

	θ_1	θ_2	r_{3x}	r_{3z}	θ_3	r_{4x}	r_{4z}	θ_4	r_{5x}	r_{5z}	θ_5
	k^1_{33}		k^1_{34}	k^1_{35}	k^1_{36}						
		k^2_{33}				k^2_{34}	k^2_{35}	k^2_{36}			
			$k^1_{44}+k^3_{11}+k^4_{11}$	$k^1_{45}+k^3_{12}+k^4_{12}$	$k^1_{46}+k^3_{13}+k^4_{13}$	k^3_{14}	k^3_{15}	k^3_{16}	k^4_{14}	k^4_{15}	k^4_{16}
				$k^1_{55}+k^3_{22}+k^4_{22}$	$k^1_{56}+k^3_{23}+k^4_{23}$	k^3_{24}	k^3_{25}	k^3_{26}	k^4_{24}	k^4_{25}	k^4_{26}
					$k^1_{66}+k^3_{33}+k^4_{33}$	k^3_{34}	k^3_{35}	k^3_{36}	k^4_{34}	k^4_{35}	k^4_{36}
						$k^2_{44}+k^3_{44}+k^5_{11}$	$k^2_{45}+k^3_{45}+k^5_{12}$	$k^2_{46}+k^3_{46}+k^5_{13}$	k^5_{14}	k^5_{15}	k^5_{16}
		symmetrisch					$k^2_{55}+k^3_{55}+k^5_{22}$	$k^2_{56}+k^3_{56}+k^5_{23}$	k^5_{24}	k^5_{25}	k^5_{26}
								$k^2_{66}+k^3_{66}+k^5_{33}$	k^5_{34}	k^5_{35}	k^5_{36}
									$k^4_{44}+k^5_{44}$	$k^4_{45}+k^5_{45}$	$k^4_{46}+k^5_{46}$
										$k^4_{55}+k^5_{55}$	$k^4_{56}+k^5_{56}$
											$k^4_{66}+k^5_{66}$

Die Elemente der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen werden in die Gesamtsteifigkeitsmatrix eingesetzt und aufaddiert. Es ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$\underline{K} = 10^3$

θ_1	θ_2	r_{3x}	r_{3z}	θ_3	r_{4x}	r_{4z}	θ_4	r_{5x}	r_{5z}	θ_5
5	0	1,875	0	2,5	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	1,875	0	2,5	0	0	0
		254,11	-95,77	1,155	-125,0	0	0	-128,179	95,77	-0,72
			322,42	-1,429	0	-0,117	-0,469	95,77	-72,31	-0,96
				11,5	0	0,469	1,25	0,72	0,96	2
					254,11	95,77	1,155	-128,179	-95,77	-0,72
						322,42	1,429	-95,77	-72,31	0,96
			symmetrisch				11,5	0,72	-0,96	2
								256,35	0	1,44
									144,61	0
										8

Für die Lösung des Gleichungssystems $\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}$ verwenden wir das Matrizeninterpretationssystem SMIS /37/.
Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt.

```
LOAD   F1 = K   N1 = 11   N2 = 11
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{K}$.

```
LOAD   F1 = R   N1 = 11   N2 = 1
:
```

Es folgen die Elemente des Lastvektors $\underline{R}$.

```
SOLVE  F1 = K   F2 = R
PRINT  F1 = R
```

Das Gleichungssystem wird gelöst, und die Knotenverformungen werden ausgegeben; der Verformungsvektor ist mit dem aus Beispiel 6.1 identisch. Mit Gleichung (5.16), $\underline{u} = \underline{C}^T \underline{r}$, können die Stabendverformungen in globalen Koordinaten berechnet werden und in die Elementvektoren zerlegt werden:

$$\underline{u}^1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3{,}243 \\ \hline 9{,}663 \\ 0{,}005 \\ -0{,}762 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3{,}189 \\ \hline 9{,}665 \\ 0{,}011 \\ -0{,}870 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^3 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 9{,}663 \\ 0{,}005 \\ -0{,}762 \\ \hline 9{,}665 \\ 0{,}011 \\ -0{,}870 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^4 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 9{,}663 \\ 0{,}005 \\ -0{,}762 \\ \hline 9{,}672 \\ 0{,}023 \\ 0{,}406 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^5 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 9{,}665 \\ 0{,}011 \\ -0{,}870 \\ \hline 9{,}672 \\ 0{,}023 \\ 0{,}406 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension [rad, m]}$$

Die Stabendkräfte werden mit Gleichung (6.13) elementweise berechnet: Die Stabendverformungsvektoren $\underline{u}^i$, Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}^i$ und Drehungsmatrizen $\underline{L}_D^i$ werden eingelesen, und die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ berechnet. Die Eingabe für SMIS sieht für das Element (i) folgendermaßen aus:

```
START
```

```
LOAD    F1 = UI     N1 = 6   N2 = 1
:
```

Es folgen die Elemente des Stabendverformungsvektors $\underline{u}^i$.

```
LOAD    F1 = LDIT   N1 = 6   N2 = 6
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Drehungsmatrix $(\underline{L}_D{}^i)^T$.

```
LOAD    F1 = KI     N1 = 6   N2 = 6
:
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$.

```
MULT    F1 = LDIT   F2 = KI   F3 = LDK
```

Es wird das Produkt $(\underline{L}_D{}^i)^T\ \underline{k}^i$ gebildet.

```
MULT    F1 = LDK    F2 = UI   F3 = SQ
```

Es wird der Vektor der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i = (\underline{L}_D{}^i)^T\ \underline{k}^i\ \underline{u}^i$ gebildet.

```
PRINT   F1 = SQ
```

Für die einzelnen Elemente ergibt sich:

$$\underline{\bar{S}}^1 = \begin{bmatrix} 1,250 \\ -1,551 \\ 0 \\ \hline -1,250 \\ 1,551 \\ 6,202 \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{S}}^2 = \begin{bmatrix} 2,750 \\ -1,448 \\ 0 \\ \hline -2,750 \\ 1,448 \\ 5,798 \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{S}}^3 = \begin{bmatrix} -0,266 \\ 0,764 \\ -2,989 \\ \hline 0,266 \\ -0,764 \\ -3,124 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{S}}^4 = \begin{bmatrix} 0,581 \\ 0,418 \\ -2,212 \\ \hline -0,581 \\ -0,418 \\ 0,123 \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{S}}^5 = \begin{bmatrix} 2,564 \\ 0,559 \\ -2,674 \\ \hline -2,564 \\ -0,559 \\ -0,123 \end{bmatrix}$$

Dimension [kN, kNm]

In Bild 6.3 und 6.4 sind die Zustandslinien dargestellt.

6.3 Eine Variante der direkten Steifigkeitsmethode

In Abschnitt 4.3 wurde die vollständige Gleichgewichtsbedingung für Stabwerke mit unverschieblichen Lagern aufgestellt. Die Knoten werden dabei so numeriert, daß die Randknoten die größten Knotennummern erhalten.

Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 6.2 beschriebenen Verfahren, werden bei der folgenden Variante alle Knoten als freie Knoten ohne Berücksichtigung der Randbedingungen betrachtet, und die *vollständige Gleichgewichtsbedingung* wird nach Gleichung (4.8) aufgestellt:

$$(\underline{a}')^T \underline{F} = \underline{R}' \; .$$

Der Lastvektor $\underline{R}'$ enthält dabei auch die Lagerreaktionen $\bar{\underline{R}}$. Eine Gesamtsteifigkeitsmatrix ohne Berücksichtigung der Randbedingungen kann analog zu Gleichung (6.10) gebildet werden:

$$\underline{K}' = \underline{C}' \; \underline{k} \; (\underline{C}')^T \; . \qquad (6.17)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}'$ ist im Gegensatz zur Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ singulär, da in $\underline{C}'$ die Randbedingungen nicht berücksichtigt werden.

Die Verknüpfungsmatrix $\underline{C}'$ muß um die den Randbedingungen entsprechenden Zeilen reduziert werden. $\underline{C}'$ ist eine $n' \times m'$ -Matrix (vgl. (4.1) und (4.3)).

Die um die n_r Randbedingungen reduzierte Verknüpfungsmatrix $\underline{C}$ hat die Dimension $[n \times m']$ mit $n = n' - n_r$.

Wir führen nun eine um n_r Nullspalten erweiterte Einheitsmatrix (Anhang A1) $\hat{\underline{I}}_{n \times n'}$ ein, um die Verknüpfungsmatrix $\underline{C}'$ in die Verknüpfungsmatrix $\underline{C}$ zu transformieren:

$$\underline{C} = \hat{\underline{I}} \; \underline{C}' \; . \qquad (6.18)$$

Die Matrix $\hat{\underline{I}}$ bewirkt ein "Streichen" der letzten n_r Zeilen (Spalten) in $\underline{C}'$ ($(\underline{C}')^T$) bzw. ein Streichen der letzten n_r Zeilen und Spalten von $\underline{K}'$.

Matrix $\underline{\hat{I}}$:

$$\underline{\hat{I}} = \left.\left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]\right\} n$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad\quad}_{n_r}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$, bei der die Randbedingungen berücksichtigt sind, erhält man dann zu:

$$\underline{K} = \underline{\hat{I}}\ \underline{K}'\ \underline{\hat{I}}^T \ . \tag{6.19}$$

Man stellt also zuerst die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}'$ nach Gleichung (6.17) auf und streicht anschließend die den Randbedingungen entsprechenden Zeilen und Spalten, um $\underline{K}$ zu erzeugen. Dieses hat den Vorteil, daß $\underline{K}'$ nicht für jeden Knotenfreiheitsgrad einzeln sondern blockweise (für jeden Knoten) aufgestellt werden kann.

Die Elementsteifigkeitsmatrix eines Elementes ⓚ in globalen Koordinaten wird hierzu bei Stabwerken in vier Untermatrizen entsprechend den Stabendknoten i und j unterteilt:

$$\underline{k}^k = \left[\begin{array}{c|c} \underline{k}^k_{ii} & \underline{k}^k_{ij} \\ \hline \underline{k}^k_{ji} & \underline{k}^k_{jj} \end{array}\right] \tag{6.20}$$

Für ein Tragwerk mit n Knoten besteht die Matrix $\underline{K}'$ aus n×n quadratischen Untermatrizen $\underline{K}'_{ij}$ der Dimension d_k (Definition 4.3).

Bei ebenen Stabelementen ist jede der Untermatrizen $\underline{k}^k_{ii}$, $\underline{k}^k_{ij}$, $\underline{k}^k_{ji}$ und $\underline{k}^k_{jj}$ eine [3×3]-Matrix, bei räumlichen Stabelementen eine [6×6]-Matrix, bei ebenen Fachwerkelementen eine [2×2]-Matrix und bei räumlichen Fachwerkelementen eine [3×3]-Matrix.

Aufgrund dieser Überlegungen gilt für ein Stabwerk mit m Elementen:

$$\underline{K}'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \underline{\tilde{k}}^{k}_{ij}$$

mit $\underline{\tilde{k}}^{k}_{ij} = \underline{k}^{k}_{ij}$ wenn i und j Knoten des Elementes Ⓚ sind, ansonsten ist $\underline{\tilde{k}}^{k}_{ij} = \underline{0}$.

Nach dem Aufbau von $\underline{K}'$ wird $\underline{K}$ nach Gleichung (6.19) durch Streichen der letzten n_r Zeilen und Spalten von $\underline{K}'$ erzeugt.

Für die praktische Berechnung kann die eingangs gestellte Forderung, daß die Randknoten die Knoten mit den größten Knotennummern sind, fallengelassen werden.
Das erfordert einen Spaltentausch in der Matrix $\hat{\underline{I}}$, so daß die den Randbedingungen entsprechenden Spalten von $\hat{\underline{I}}$ Nullspalten sind.
Weiterhin kann die Forderung, daß alle Lager unverschiebliche Lager sind, fallengelassen werden. Dann sind nicht nur vollständige Untermatrizen, sondern auch einzelne Zeilen und Spalten zu streichen.

Beispiel 6.3:
Der Rahmen von Beispiel 6.1 und 6.2 wird mit der Variante der direkten Steifigkeitsmethode berechnet.
Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}'$ hat folgende Form (Bild 6.2):

$$\underline{K}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\underline{k}^{1}_{11} & & \underline{k}^{1}_{13} & & \\
\hline
 & \underline{k}^{2}_{22} & & \underline{k}^{2}_{24} & \\
\hline
 & & \underline{k}^{1}_{33}+\underline{k}^{3}_{33}+\underline{k}^{4}_{33} & \underline{k}^{3}_{34} & \underline{k}^{4}_{35} \\
\hline
 & & & \underline{k}^{2}_{44}+\underline{k}^{3}_{44}+\underline{k}^{5}_{44} & \underline{k}^{5}_{45} \\
\hline
 & \text{symmetrisch} & & & \underline{k}^{4}_{55}+\underline{k}^{5}_{55}
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

1 2 3 4 5 ← Knoten

Die einzelnen Elemente der Untermatrizen werden eingesetzt und komponentenweise aufaddiert. Es ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix ohne Berücksichtigung der Randbedingungen ($\underline{K}'$, siehe Seite 111).
Die Freiheitsgrade r_{1_x}, r_{1_z}, r_{2_x} und r_{2_z} sind durch die Lagerung behindert. Durch Streichen der 1., 2., 4. und 5. Zeile und Spalte in $\underline{K}'$ wird $\underline{K}$ gebildet.
Die Berechnung der Knotenverformungen und der Stabendkräfte erfolgt wie in Abschnitt 6.2.
In SMIS /37/ stehen spezielle "Befehle" für den Aufbau der Steifigkeitsmatrix zur Verfügung. Mit diesen Befehlen ist es nicht notwendig, die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ als Ganzes einzulesen.

6.4 Das Drehwinkelverfahren

Das Drehwinkelverfahren ist ein Verfahren zur Berechnung von Stabtragwerken unter gewissen Vernachlässigungen. Es ist Grundlage der in Kapitel 11 beschriebenen iterativen Verfahren.
Beim Drehwinkelverfahren werden vernachlässigt:
- Der Einfluß der Querkraft auf die Verformungen;
- der Einfluß der Normalkraft auf die Verformungen.

Die Vernachlässigung der Normalkrafteinflüsse bedeutet, daß alle Stäbe ihre ursprüngliche Länge beibehalten. Elementverformungen sind nur die *Stabenddrehwinkel* $v_2 \equiv \varphi_\ell$ und $v_3 \equiv \varphi_r$ des Stabelementes Typ-a (Bild 6.7). Die zugehörigen linear unabhängigen Stabendkräfte sind die Momente $F_2 \equiv M_\ell$ und $F_3 \equiv M_r$.

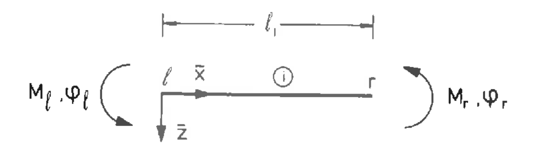


Bild 6.7 Stabelement ohne Normalkraftverformungen

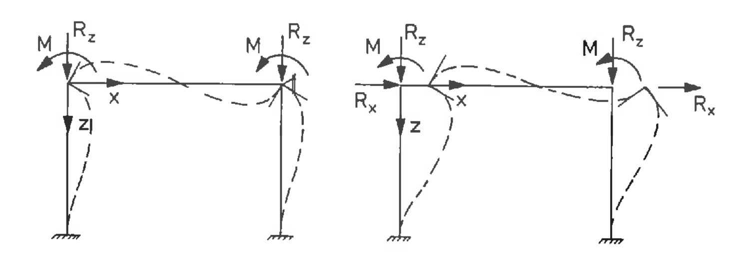
$\underline{K}' = 10^3$

	← Knoten	1			2			3			4			5		
		r_{1x}	r_{1z}	θ_1	r_{2x}	r_{2z}	θ_2	r_{3x}	r_{3z}	θ_3	r_{4x}	r_{4z}	θ_4	r_{5x}	r_{5z}	θ_5
r_{1x}		0,9375	0	-1,875				-0,9375	0	-1,875						
r_{1z}	1		250	0		$\underline{0}$		0	-250	0		$\underline{0}$			$\underline{0}$	
θ_1				5				1,875	0	2,5						
r_{2x}					0,9375	0	-1,875				0,9375	0	-1,875			
r_{2z}	2					250	0		$\underline{0}$		0	-250	0		$\underline{0}$	
θ_2							5				1,875	0	2,5			
r_{3x}								254,11	-95,77	1,155	-125	0	0	-128,17	95,77	-0,72
r_{3z}	3								322,42	-1,429	0	-0,117	-0,469	95,77	-72,31	-0,96
θ_3										11,5	0	0,469	1,25	0,72	0,96	2
r_{4x}											254,11	95,77	1,155	-128,17	-95,77	-0,72
r_{4z}	4				symmetrisch							322,42	1,429	-95,77	-72,31	0,96
θ_4													11,5	0,72	-0,96	2
r_{5x}														256,35	0	1,44
r_{5z}	5														144,61	0
θ_5																8

Beim Drehwinkelverfahren unterscheidet man verschiebliche und unverschiebliche Systeme.

Ein System ist *unverschieblich*, wenn sich die Knoten für eine gegebene Belastung nicht verschieben, sondern ausschließlich verdrehen (Bild 6.8 (a)). Verdrehungen entgegen dem Uhrzeigersinn sind positiv.

Ein System ist *verschieblich*, wenn sich die Knoten eines Tragwerkes unter einer gegebenen Belastung nicht nur verdrehen, sondern auch auf Bahnen senkrecht zu den Stabachsen der Elemente verschieben (Bild 6.8 (b)).



(a) unverschieblicher Rahmen (b) verschieblicher Rahmen

Bild 6.8 Verschiebliches und unverschiebliches System

Bei *unverschieblichen Systemen* hat der Vektor der Knotenverformungen $\underline{r}$ die *Knotendrehwinkel* Θ_i als Komponenten. Für das Drehwinkelverfahren verwendet man normalerweise nicht die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ von Kapitel 4, sondern leitet sich aus der kinematischen Verträglichkeit die Matrix $\underline{a}$ ab. Für unverschiebliche Systeme ist die Matrix $\underline{a}$ immer eine (0,1)-Matrix. In Gleichung (5.12)

$$\underline{v} = \underline{a}\ \underline{r}$$

ist $a_{ij} = 1$, wenn der Stabenddrehwinkel v_i mit dem Knotendrehwinkel r_j übereinstimmt. Sonst ist $a_{ij}=0$. Die Verträglichkeitsmatrix hat die gleiche Form wie die Verknüpfungsmatrix $\underline{C}^T$. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ kann somit nach der direkten Steifigkeitsmethode aufgestellt werden.

Bei *verschieblichen Systemen* hat der Vektor der Knotenverformungen $\underline{r}$ neben den *Knotendrehwinkeln* Θ_i auch *linear unabhängige Knotenverschiebungen* r_x bzw. r_z als Komponenten.

Eine Knotenverschiebung ist von allen anderen Knotenverschiebungen linear unabhängig, wenn es unter Beachtung der oben genannten Voraussetzungen einen kinematisch zulässigen Verformungszustand gibt. Der Verformungszustand einer linear unabhängigen Knotenverschiebung kann nicht durch Überlagerung mit Verformungszuständen infolge anderer Knotenverschiebungen dargestellt werden.

Die Knotenverschiebungen r_x und r_z erzeugen *Stabdrehwinkel* ψ. In Bild 6.9 ist der Stabdrehwinkel für eine Verschiebung Δr des rechten und linken Knotens senkrecht zur Stabachse dargestellt.

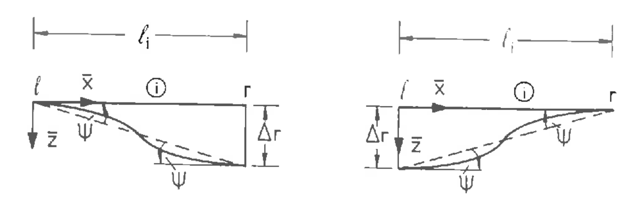


Bild 6.9 Stabdrehwinkel ψ

Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen berechnet man den Stabdrehwinkel für eine Verschiebung Δr des rechten Stabendes senkrecht zur Stabachse

$$\psi = \Delta r/\ell_i \ . \qquad (6.21)$$

Für eine Verschiebung Δr des linken Stabendes senkrecht zur Stabachse ist

$$\psi = -\Delta r/\ell_i \ . \qquad (6.22)$$

Die *Stabenddrehwinkel* φ_ℓ und φ_r infolge des Stabdrehwinkels ψ sind

$$\varphi_\ell = \varphi_r = \psi \ . \qquad (6.23)$$

Die zugehörige Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r^i$ ist:

$$\underline{k}_r^i = \frac{2EI_y}{\ell_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Für die Berechnung der Knotendrehwinkel und der Knotenverschiebungen gilt Gleichung (6.4)

$$\underline{a}^T \underline{k}_r \underline{a} \underline{r} = \underline{R} .$$

Die Stabendmomente werden mit Gleichung (6.3) berechnet.

$$\underline{F} = \underline{k}_r \underline{a} \underline{r} .$$

Das Drehwinkelverfahren ist damit eine Variante des in Abschnitt 6.1 hergeleiteten Weggrößenverfahrens. Der Berechnungsgang unterscheidet sich nur in der Besetzung der Verträglichkeitsmatrix $\underline{a}$ und der Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r$. Es folgt die

Zusammenfassung der Berechnung nach dem Drehwinkelverfahren

(1) Besetzung der Verträglichkeitsmatrix $\underline{a}$;

(2) Besetzung der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r$.

Es folgen die Berechnugsschritte (3) bis (7) des in Abschnitt 6.1 beschriebenen Weggrößenverfahrens.

Beispiel 6.4:

Der in Bild 6.2 dargestellte Rahmen ist für die angegebene Belastung verschieblich. Die Knotenverdrehungen Θ_i der Knoten 1 bis 5 und die horizontale Verschiebung r_x des Knotens 3, 4 oder 5 sind linear unabhängig. In Bild 6.10 sind die zu den einzelnen Verformungsfreiheitsgraden gehörenden Verformungsfiguren dargestellt. Die Verformungsfigur für einen Verformungsfreiheitsgrad erhält man durch Vorgabe einer dem Freiheitsgrad entsprechenden Einheitsverformung. Die sich aus der Verformungsfigur ergebenden Stabenddrehwinkel φ_i werden von der Sekante, der Verbindungslinie der Knoten im verformten System, zur Tangente gemessen (Bild 6.9).

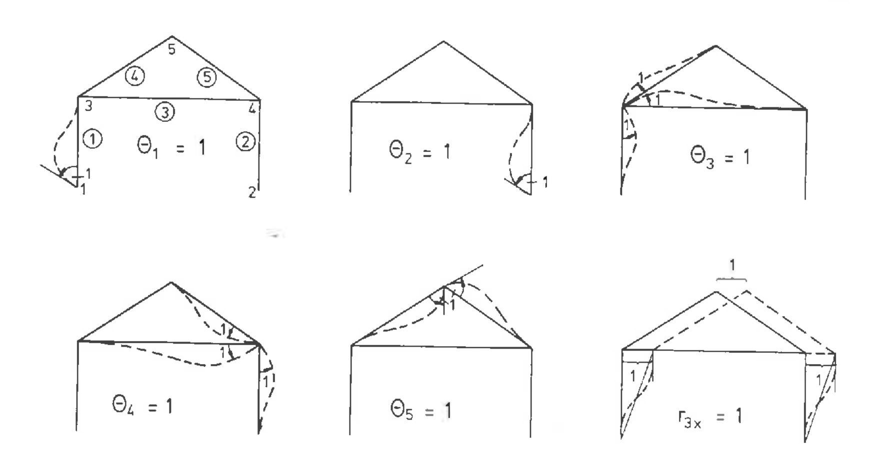
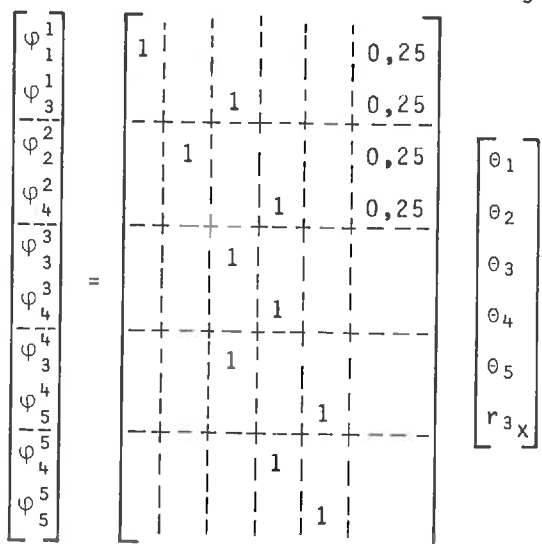


Bild 6.10 Verformungszustände für Einheitsverformungen entsprechend den Knotenfreiheitsgraden

Mit den in Bild 6.10 dargestellten Verformungsfiguren ergibt sich für die kinematische Verträglichkeit:



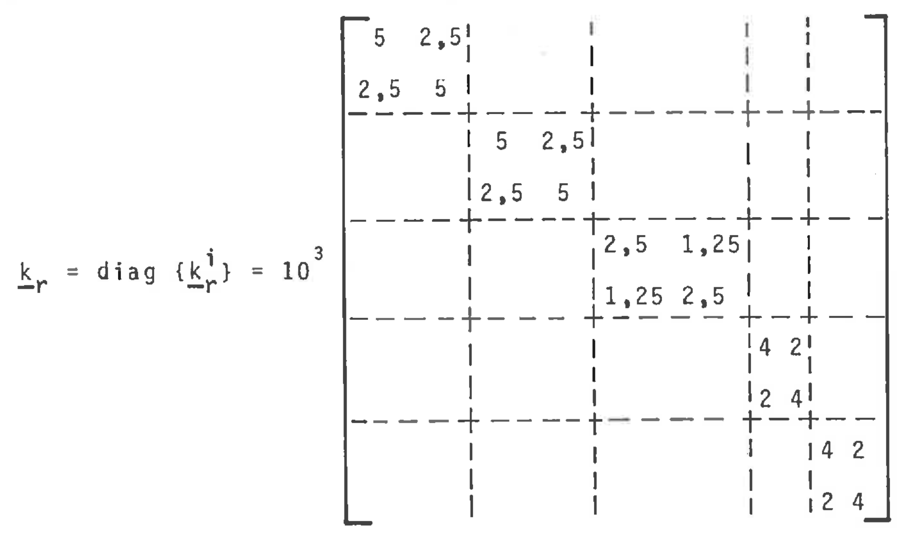
$$\begin{bmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_3^1 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_4^2 \\ \varphi_3^3 \\ \varphi_4^3 \\ \varphi_3^4 \\ \varphi_5^4 \\ \varphi_4^5 \\ \varphi_5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0{,}25 \\ & & 1 & & & 0{,}25 \\ & 1 & & & & 0{,}25 \\ & & & 1 & & 0{,}25 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \\ r_{3x} \end{bmatrix}$$

Um den Lastvektor aufstellen zu können, müssen alle Lasten in die Richtungen der linear unabhängigen Knotenverformungen transformiert werden. Die Vertikallasten in den Knoten 3 und 5 werden über die Normalkräfte in die Auflager geleitet. Die Horizontallast im Knoten 5 muß zu der Horizontal-

last im Knoten 3 addiert werden, da beide Kräfte auf dem gleichen Weg Arbeit leisten. Damit ergibt sich der Lastvektor:

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [kN,\ kNm]\ .$$

Die Hyperdiagonalmatrix der reduzierten Steifigkeitsmatrizen ohne Normalkraftverformungen ist:



$$\underline{k}_r = \text{diag}\ \{\underline{k}_r^i\} = 10^3 \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 5 & 2,5 & & & & & & & & \\ 2,5 & 5 & & & & & & & & \\ \hline & & 5 & 2,5 & & & & & & \\ & & 2,5 & 5 & & & & & & \\ \hline & & & & 2,5 & 1,25 & & & & \\ & & & & 1,25 & 2,5 & & & & \\ \hline & & & & & & 4 & 2 & & \\ & & & & & & 2 & 4 & & \\ \hline & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Die Eingabe für SMIS entspricht der von Beispiel 6.1. Es wird jedoch anstelle der Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ die kinematische Verträglichkeitsmatrix $\underline{a}$ eingelesen.

Als Lösung erhält man die Knotenverdrehungen und die horizontale Verschiebung im Punkt 3:

$$\underline{r} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -3,243 \\ -3,187 \\ -0,759 \\ -0,870 \\ 0,407 \\ 9,659 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \\ r_{3x} \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [rad,\ m]\ .$$

Mit der Multiplikation $\underline{k}_r \underline{a}\ \underline{r} = \underline{F}$ werden die Stabendmomente berechnet:

$$\underline{F} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 6{,}208 \\ \hline 0 \\ 5{,}792 \\ \hline -2{,}986 \\ -3{,}125 \\ \hline -2{,}222 \\ 0{,}111 \\ \hline -2{,}667 \\ -0{,}111 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -M_{11} \\ M_{13} \\ \hline -M_{22} \\ M_{24} \\ \hline -M_{33} \\ M_{34} \\ \hline -M_{43} \\ M_{45} \\ \hline -M_{54} \\ M_{55} \end{array}\right] \quad \text{Dimension [kNm].}$$

Mit diesen Stabendkräften kann die Momentenzustandslinie gezeichnet werden. Die Stabendmomente stimmen bis auf eine Abweichung von 10,8 % bei M_{45} bzw. M_{55} mit denen von Beispiel 6.1 überein.

Die Darstellung des Drehwinkelverfahrens in der vorliegenden Form ist den Matrizenmethoden der Statik angepaßt. In der üblichen Darstellung wird die direkte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix und die Lösung der "Drehwinkelgleichungen" als Drehwinkelverfahren bezeichnet.

6.5 Kondensation der Steifigkeitsmatrix

Bei manchen Berechnungen enthält der Lastvektor nur wenige von Null verschiedene Komponenten. In diesen Fällen kann die Steifigkeitsmatrix des Systems auf die belasteten Knoten "kondensiert" werden (vgl. Przemieniecki /66/, Seite 147). Die Anzahl der Unbekannten des Gleichungssystems wird dabei reduziert.

Das Verfahren erfordert für größere Systeme bei einer Programmierung einen erheblichen Organisationsaufwand. Die An-

zahl der Operationen wird dabei im allgemeinen nicht geringer. Bei der Berechnung von Hand sind große Gleichungssysteme problematisch. Da bis zu [3×3]-Matrizen schnell und überschaubar invertiert werden können, empfiehlt sich dieses Verfahren nur für Systeme mit bis zu 6 Freiheitsgraden.

Das Gleichungssystem (6.6) kann in diesen Fällen auf folgende Form gebracht werden:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \hline \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \hline \underline{r}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \underline{R}_1 \\ \hline \underline{0} \end{array}\right] \qquad (6.25)$$

$\underline{R}_1$ ist der Lastvektor, der nur Nichtnullelemente enthält,
$\underline{r}_1$ der Vektor der Knotenverformungen in Richtung der Belastung,
$\underline{r}_2$ der Vektor der Knotenverformungen in Richtung der lastfreien Knotenfreiheitsgrade.
$\underline{K}_{11}$, $\underline{K}_{12}$, $\underline{K}_{21}$ und $\underline{K}_{22}$ sind Untermatrizen von $\underline{K}$ entsprechend der Unterteilung von $\underline{r}$ in $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$.

Das Gleichungssystem (6.25) ist ein System zweier gekoppelter Matrizengleichungen:

$$\underline{K}_{11}\,\underline{r}_1 + \underline{K}_{12}\,\underline{r}_2 = \underline{R}_1 \qquad (6.26)$$

$$\underline{K}_{21}\,\underline{r}_1 + \underline{K}_{22}\,\underline{r}_2 = \underline{0}\,. \qquad (6.27)$$

Aus (6.27) erhält man

$$\underline{K}_{22}\,\underline{r}_2 = -\underline{K}_{21}\,\underline{r}_1 \quad \text{bzw.} \quad \underline{r}_2 = -\underline{K}_{22}^{-1}\,\underline{K}_{21}\,\underline{r}_1\,. \qquad (6.28)$$

Setzt man (6.28) in (6.26) ein, so ist:

$$(\underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\,\underline{K}_{22}^{-1}\,\underline{K}_{21})\underline{r}_1 = \underline{R}_1\,. \qquad (6.29)$$

Definiert man

$$\tilde{\underline{K}}_{11} = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\,\underline{K}_{22}^{-1}\,\underline{K}_{21}\,, \qquad (6.30)$$

dann ergibt sich

$$\underline{\bar{K}}_{11}\,\underline{r}_1 = \underline{R}_1\ . \tag{6.31}$$

Das Gleichungssystem (6.25) wird damit auf zwei kleinere Gleichungssysteme (6.31) und (6.28) reduziert. Das erste Gleichungssystem (6.31) hat als Unbekannte nur die Knotenverformungen in den Belastungsrichtungen. Mit diesen Knotenverformungen kann das Gleichungssystem (6.28) gelöst werden; die Knotenverformungen in den lastfreien Richtungen sind dabei die Unbekannten. Die kondensierte Steifigkeitsmatrix $\underline{\bar{K}}_{11}$ ist durch Gleichung (6.30) bestimmt.
An der Steifigkeitsmatrix des Beispiels 6.4 wollen wir das Verfahren erläutern.

Beispiel 6.5:
In Beispiel 6.4 wurden $\underline{a}$, $\underline{k}_r$ und $\underline{R}$ für den Rahmen von Bild 6.2 bereits ermittelt. Daraus ergeben sich die Steifigkeitsmatrix $\underline{K} = \underline{a}^T\,\underline{k}_r\,\underline{a}$ und der Lastvektor $\underline{R}$:

$$\underline{K} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0 & 1{,}875 \\ 0 & 5 & 0 & 2{,}5 & 0 & 1{,}875 \\ 2{,}5 & 0 & 11{,}5 & 1{,}25 & 2 & 1{,}875 \\ 0 & 2{,}5 & 1{,}25 & 11{,}5 & 2 & 1{,}875 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 1{,}875 & 1{,}875 & 1{,}875 & 1{,}875 & 0 & 1{,}875 \end{bmatrix} \qquad \underline{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Durch Zeilen- und Spaltentausch der ersten und letzten Zeile bzw. Spalte ergibt sich

$$10^3 \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1{,}875 & 1{,}875 & 1{,}875 & 1{,}875 & 0 & 1{,}875 \\ 1{,}875 & 5 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}875 & 0 & 11{,}5 & 1{,}25 & 2 & 2{,}5 \\ \hline 1{,}875 & 2{,}5 & 1{,}25 & 11{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 1{,}875 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} r_{3x} \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \hline \Theta_4 \\ \Theta_5 \\ \Theta_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Um nur maximal [3×3]-Matrizen zu haben, behalten wir im Lastvektor $\underline{R}$ die zu R_2 korrespondierende Nullkomponente bei.

Mit dem im Anhang A2.1 beschriebenen Verfahren invertieren wir die Matrix:

$$\underline{K}_{22} = 10^3 \begin{bmatrix} 11,5 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dies ergibt:

$$\underline{K}_{22}^{-1} = \frac{10^{-3}}{440} \begin{bmatrix} 40 & -10 & 0 \\ -10 & 57,5 & 0 \\ 0 & 0 & 88 \end{bmatrix}$$

Bei der Berechnung von $\tilde{\underline{K}}_{11}$ nach Gleichung (6.30) führt man zuerst das Matrizenprodukt $\underline{K}_{22}^{-1}\ \underline{K}_{21}$ aus, da es für die Berechnung von $\underline{r}_2$ nach Gleichung (6.28) nochmals benötigt wird.

Nach Gleichung (6.30) ist:

$$\tilde{\underline{K}}_{11} = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\ \underline{K}_{22}^{-1}\ \underline{K}_{21} = \frac{10^3}{440} \begin{bmatrix} 375 & 637,5 & 356,25 \\ 637,5 & 1950 & -75 \\ 356,25 & -75 & 4267,5 \end{bmatrix}$$

Mit $\tilde{\underline{K}}_{11}$ kann das Gleichungssystem (6.31) gelöst werden:

$$\underline{r}_1 = \tilde{\underline{K}}_{11}^{-1}\ \underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 9,6592 \\ -3,1870 \\ -0,7593 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Aus Gleichung (6.28) wird $\underline{r}_2$ berechnet:

$$\underline{r}_2 = -\underline{K}_{22}^{-1}\ \underline{K}_{21}\ \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -0,8704 \\ 0,4074 \\ -3,2426 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad \text{Dimension [rad, m]}$$

Die Komponenten von $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ sind die in Beispiel 6.4 berechneten Knotenverformungen.
Bei der Handrechnung verwendet man für die Durchführung der *Matrizenmultiplikationen* sinnvoller Weise das im Anhang A1.2 beschriebene *Falk'sche Schema*.

6.6 Das Verfahren der Belastungsumordnung

Ist ein Stabwerk in der Anordnung seiner Stäbe und Lagerbedingungen symmetrisch, dann kann durch das Belastungsumordnungsverfahren eine Verkleinerung des Gleichungssystems erreicht werden.
Bei einem symmetrischen Tragwerk kann jede beliebige Belastung in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastfall aufgespalten werden (Bild 6.11).

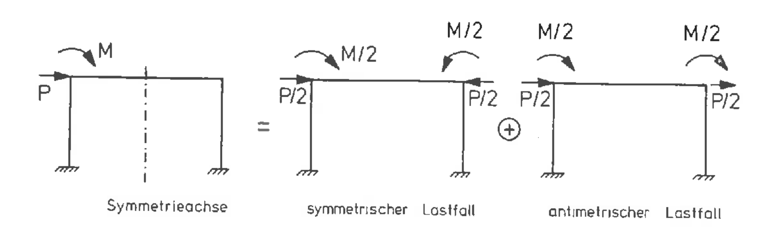


Bild 6.11 Aufteilung einer beliebigen Belastung in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastfall

Symmetrische Tragwerke haben die Eigenschaft, daß sie sich unter symmetrischer Belastung symmetrisch und unter antimetrischer Belastung antimetrisch verformen (Bild 6.12). Dies folgt direkt aus der ~~Linearität~~ Symmetrie des Systems.

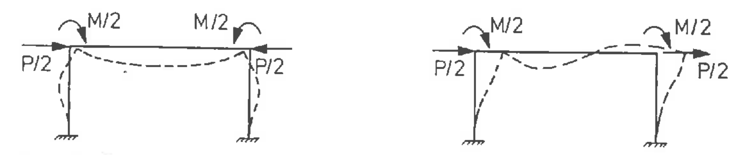


Bild 6.12 Verformungsfiguren unter symmetrischer und antimetrischer Belastung

Aus diesem Verformungsverhalten lassen sich Bedingungen für die inneren Kräfte in der Symmetrieachse bei symmetrischer und antimetrischer Belastung herleiten. Diese Bedingungen sind zusammengefaßt in

Satz 6.2: *Bei symmetrischer Belastung sind die Normalkräfte und Biegemomente symmetrisch und die Querkräfte antimetrisch.*
Bei antimetrischer Belastung sind die Querkräfte symmetrisch und die Normalkräfte und Biegemomente antimetrisch.
Bei symmetrischer Belastung sind in Schnittpunkten des Tragwerks mit der Symmetrieachse die Kräfte in Richtung der Symmetrieachse Null.
Bei antimetrischer Belastung sind in Schnittpunkten des Tragwerks mit der Symmetrieachse die Kräfte senkrecht zur Symmetrieachse und die Momente Null.

Aufgrund dieses Satzes können symmetrische Tragwerke jeweils für die symmetrische und antimetrische Belastung in Teilstrukturen zerlegt werden. Für den Rahmen von Bild 6.11 sind diese Teilstrukturen in Bild 6.13 dargestellt.

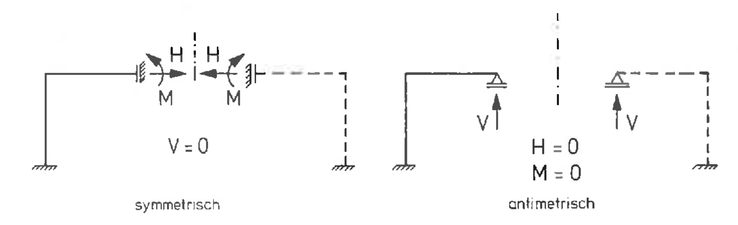


Bild 6.13 Teilung eines symmetrischen Stabtragwerks in Teilstrukturen

Befindet sich in der Symmetrieachse eines Stabwerkes ein Stab (Bild 6.14), dann gilt ebenfalls Satz 6.2. Die Teilung des Tragwerks in Teilstrukturen ist in Bild 6.14 (b) und (c) dargestellt.
Für die Teilstrukturen unter symmetrischer und antimetrischer Belastung können die Knotenverformungen, die Stabend-

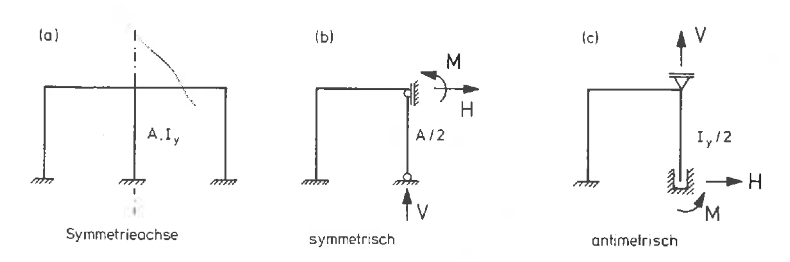


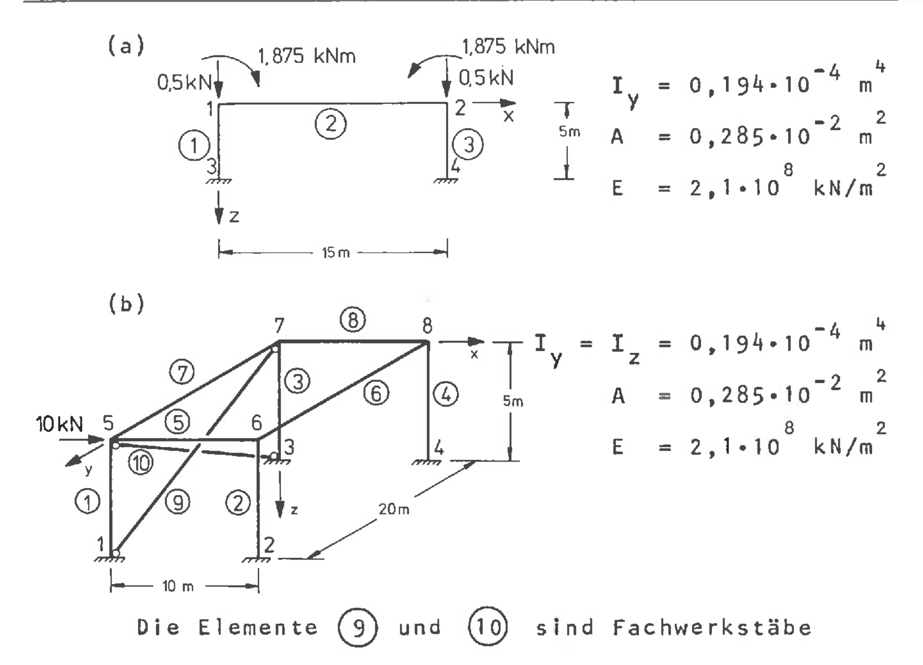
Bild 6.14 Teilung eines symmetrischen Stabtragwerkes mit Stab in der Symmetrieachse in Teilstrukturen

kräfte und die Schnittgrößen nach dem Weggrößenverfahren berechnet werden.
Nach der Berechnung werden die Schnittgrößen für den symmetrischen und den antimetrischen Lastfall zum Gesamtsystem ergänzt.
Beim symmetrischen Lastfall werden die Knotenverformungen, die Normalkraft N(x) und das Biegemoment M(x) symmetrisch und die Querkraft Q(x) antimetrisch ergänzt.
Beim antimetrischen Lastfall werden die Knotenverformungen, die Normalkraft N(x) und das Biegemoment M(x) antimetrisch und die Querkraft Q(x) symmetrisch ergänzt.

Die Verformungen (Schnittgrößen) unter vollständiger Belastung sind die Summe der Verformungen (Schnittgrößen) infolge symmetrischer und antimetrischer Belastung (Superpositionsprinzip).

Aufgaben:

6.1 Man stelle für die abgebildeten Stabwerke die Grundgleichung des Wegrößenverfahrens nach den drei in Abschnitt 6.1 bis 6.3 beschriebenen Verfahren auf.



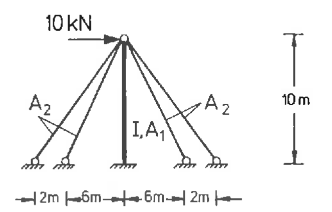
$I_y = 0,194 \cdot 10^{-4}$ m^4
$A = 0,285 \cdot 10^{-2}$ m^2
$E = 2,1 \cdot 10^8$ kN/m^2

$I_y = I_z = 0,194 \cdot 10^{-4}$ m^4
$A = 0,285 \cdot 10^{-2}$ m^2
$E = 2,1 \cdot 10^8$ kN/m^2

Die Elemente (9) und (10) sind Fachwerkstäbe

6.2 Man stelle für den ebenen Rahmen von Aufgabe 6.1 (a) die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens nach dem Drehwinkelverfahren (Abschnitt 6.4) auf und löse das Gleichungssystem.

6.3 Man stelle für das abgebildete Stabtragwerk die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens nach der direkten Steifigkeitsmethode auf und löse das Gleichungssystem.



$I_y = 0,194 \cdot 10^{-4}$ m^4
$A_1 = 0,285 \cdot 10^{-2}$ m^2
$A_2 = 0,100 \cdot 10^{-2}$ m^2
$E = 2,1 \cdot 10^8$ kN/m^2

7 Sonderfälle der Belastung

Die Belastung eines Stabwerkes tritt üblicherweise nicht - wie wir bisher vorausgesetzt haben - in Form von Knotenlasten auf. Die typischen Lastfälle sind

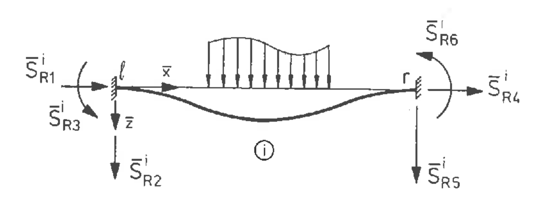
Eigengewicht, Windbelastung, Verkehrslasten,
Temperaturbelastung, Vorspannung,
Vorverformung und Stützensenkung.

Im folgenden wird gezeigt, wie diese Lastfälle - die Regelfälle der Praxis - auf Knotenlasten zurückgeführt werden können. Vom Standpunkt der Matrizenrechnung aus, sind die Lastfälle deshalb als Sonderfälle der Belastung zu betrachten.

7.1 Ersatzknotenlasten

Belastete Stabelemente werden durch Lasten beansprucht, die zwischen den Knoten angreifen.

An den beiden Knoten des Elementes sind Verformungs- und Kraftgrößen definiert. Für die Berechnung der Ersatzknotenlasten eines belasteten Stabelementes denkt man sich alle Stabendverformungen zu Null gesetzt (homogene Randbedingungen der Verformung). Dies ist beispielhaft in Bild 7.1 dargestellt.



Randbedingungen: $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_6 = 0$

Bild 7.1 Stabendkräfte eines belasteten Balkenelementes

Die Stabendkräfte des belasteten Elementes mit homogenen Randbedingungen der Verformung werden mit $\underline{\bar{S}}^i_R$ bezeichnet.

Die Berechnung dieser Kräfte kann über die Lösung der vollständigen Differentialgleichung der Balkentheorie erfolgen. Es können aber auch andere aus der Baustatik (/28/, /74/, /79/) bekannte Verfahren benutzt werden. Die Stabendkräfte für die üblichen Lastfälle *ebener Stabtragwerke* sind in Tafel 7.1 zusammengestellt. Bei der Verwendung anderer Tafelwerke sind die Vorzeichendefinitionen zu beachten.

Beispiel 7.1:

Für das in Bild 7.2 dargestellte, mit einer konstanten Streckenlast belastete Element, sind die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_R^i$ aus den Differentialgleichungen der Balkentheorie zu bestimmen.

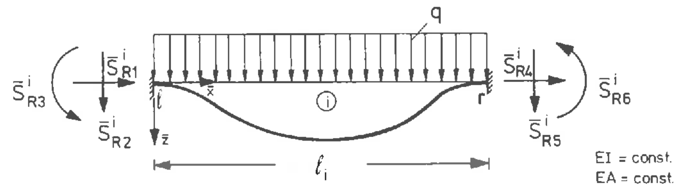


Bild 7.2 Element mit konstanter Streckenlast

Die Differentialgleichungen eines Balkens mit konstanter Streckenlast unter Vernachlässigung der Querkrafteinflüsse sind nach (3.1) und (5.11) mit $w \equiv w_z$, $q \equiv q_z$ und $u \equiv u_x$:

$$EIw^{IV}(\bar{x}) = q$$

$$EAu''(\bar{x}) = 0 \; .$$

Mit den homogenen Randbedingungen

$$w(0) = w(\ell) = u(0) = u(\ell) = 0$$

$$w'(0) = w'(\ell) = 0$$

ergibt sich für die Biegelinie

$$EIw(\bar{x}) = \frac{q\bar{x}^4}{24} - \frac{q\ell\bar{x}^3}{12} + \frac{q\ell^2\bar{x}^2}{24}$$

und für die Normalverformungen

$$EAu(\bar{x}) = 0 \; .$$

Die Stabendkräfte erhält man durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (vgl. Abschnitt 5.1 und 3.1):

$$
\begin{aligned}
-\bar{S}^i_{R1} &\equiv N(0) = EAu'(0) = 0 \\
-\bar{S}^i_{R2} &\equiv Q(0) = -EIw'''(0) = q\ell/2 \\
-\bar{S}^i_{R3} &\equiv M(0) = -EIw''(0) = -q\ell^2/12 \\
\bar{S}^i_{R4} &\equiv N(\ell) = EAu'(\ell) = 0 \\
\bar{S}^i_{R5} &\equiv Q(\ell) = -EIw'''(\ell) = -q\ell/2 \\
\bar{S}^i_{R6} &\equiv M(\ell) = -EIw''(\ell) = -q\ell^2/12 .
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\underline{\bar{S}}^i_R = \begin{bmatrix} 0 \\ -q\ell/2 \\ q\ell^2/12 \\ \hline 0 \\ -q\ell/2 \\ -q\ell^2/12 \end{bmatrix} .
$$

Die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i_R$ werden nun auf globale Koordinaten transformiert:

$$
\underline{S}^i_R = \underline{L}_D{}^i \, \underline{\bar{S}}^i_R . \tag{7.1}
$$

$\underline{L}_D{}^i$ ist die bekannte Drehungsmatrix (Abschnitt 3.4).
Nach der Berechnung der Stabendkräfte $\underline{S}^i_R$ aller belasteten Stabelemente wird der Obervektor $\underline{S}_R$ für das Gesamttragwerk gebildet. Für unbelastete Elemente ist $\underline{S}^i_R = 0$.
Mit den Stabendkräften $\underline{S}_R$ werden die Ersatzknotenlasten wie folgt definiert:

Definition 7.1: *Ersatzknotenlasten sind die statisch äquivalenten Knotenlasten des Gesamttragwerkes für die Stabendkräfte* $\underline{S}_R$*. Die Stabendkräfte* $\underline{S}_R$ *ergeben sich bei homogenen Randbedingungen der Verformung aller Elemente.*

Die Ersatzknotenlasten werden mit $\underline{R}_R$ bezeichnet. Für das Gesamttragwerk muß gelten (statisch äquivalent):

$$\underline{C}\ \underline{S}_R + \underline{R}_R = \underline{0} \qquad (7.2)$$

oder $$\underline{R}_R = - \underline{C}\ \underline{S}_R \ .$$

$\underline{C}$ ist die Inzidenzmatrix (Abschnitt 4.6). Durch das Produkt $\underline{C}\ \underline{S}_R$ erhält man komponentenweise die Summe der auf einen Knoten des Stabwerkes einwirkenden Kräfte. Die statisch äquivalenten Knotenlasten sind die negative Summe dieser Kräfte.

Die weitere Berechnung erfolgt nach dem Weggrößenverfahren. Wir nehmen an, daß zusätzlich zu den Ersatzknotenlasten $\underline{R}_R$ Knotenlasten $\underline{R}$ am Stabwerk angreifen. Die Knotenverformungen $\underline{r}$ erhält man aus

$$\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R} + \underline{R}_R \ . \qquad (7.3)$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ wird für das Stabtragwerk mit unbelasteten Elementen aufgestellt. Für die Stabendkräfte infolge Knotenlasten gilt (Kapitel 6):

$$\underline{F} = \underline{k}_r\ \underline{a}\ \underline{r} \ , \qquad (7.4)$$

$$\underline{\bar{S}} = \underline{T}\ \underline{F} \ , \qquad (7.5)$$

und $$\underline{S} = \underline{L}_D\ \underline{\bar{S}} \ . \qquad (7.6)$$

Die Stabendkräfte $\underline{S}$ sind mit den Knotenlasten $\underline{R}$ und den Ersatzknotenlasten $\underline{R}_R$ im Gleichgewicht, d.h.

$$\underline{C}\ \underline{S} = \underline{R} + \underline{R}_R \ . \qquad (7.7)$$

Durch Addition von (7.2) und (7.7) erhält man:

$$\underline{C}\ (\underline{S} + \underline{S}_R) = \underline{R} \ . \qquad (7.8)$$

Die Summe der Stabendkräfte ($\underline{S}$) infolge der Knotenlasten und Ersatzknotenlasten und der Stabendkräfte ($\underline{S}_R$) ergeben

die tatsächlichen Stabendkräfte:

$$\underline{S}^{+} = \underline{S} + \underline{S}_R \ . \tag{7.9}$$

Üblicherweise werden die Stabendkräfte auf lokale Koordinaten transformiert:

$$\overline{\underline{S}}^{+} = \underline{L}_D^{T} \ (\underline{S} + \underline{S}_R) \ . \tag{7.10}$$

Für die Knotenverformungen $\underline{r}$ ist keine weitere Transformation erforderlich: in den Knotenpunkten stimmen die Verformungen infolge Ersatzknotenlasten mit den tatsächlichen überein.

Die Schnittgrößen und Verformungen als Funktion der lokalen Koordinate $\overline{x}$ der belasteten Stabelemente müssen unter Beachtung der Randbedingungen und der Belastung der Elemente berechnet werden. Man berechnet zunächst die Funktion infolge der Knoten- und Ersatzknotenlasten und addiert dazu die Funktion infolge der Belastung im Element bei homogenen Randbedingungen der Verformungen analog zu Gleichung (7.9). In Bild 7.3 wird dieser Berechnungsgang qualitativ für eine Verformungsfunktion w^{+} dargestellt.

Die Verformungen $w^{+}(\overline{x})$ - die Biegelinie des Stabtragwerkes - erhält man als Summe der Verformungsanteile infolge Knoten- und Ersatzknotenlasten $(w(\overline{x}))$ und denen infolge Belastung im Element bei homogenen Randbedingungen der Verformung $(w_R(\overline{x}))$:

$$w^{+}(\overline{x}) = w(\overline{x}) + w_R(\overline{x}) \ . \tag{7.11}$$

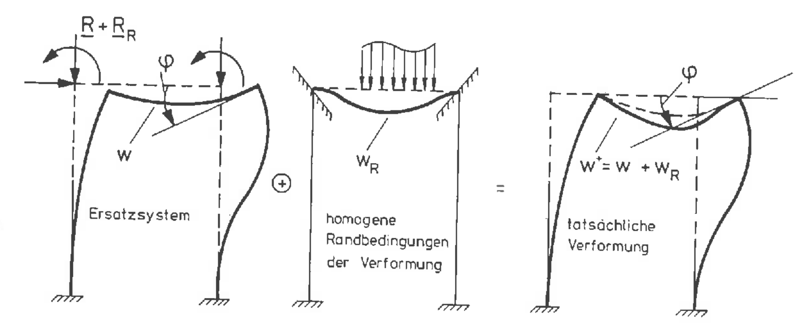


Bild 7.3 Verformungsberechnung mit Ersatzknotenlasten

	Belastung	$\bar{S}_{R1}$	$\bar{S}_{R2}$	$\bar{S}_{R3}$	$\bar{S}_{R4}$	$\bar{S}_{R5}$	$\bar{S}_{R6}$
	$\bar{S}_{R1}$, $\bar{S}_{R2}$, $\bar{S}_{R3}$, l, l_i, r, $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{S}_{R4}$, $\bar{S}_{R5}$, $\bar{S}_{R6}$						
1.	a, b, P	$-\frac{Pb}{l_i}$	0	0	$P(\frac{b}{l_i}-1)$	0	0
2.	a, b, P	0	$-P\frac{b^2}{l_i^2}(1+\frac{2a}{l_i})$	$P\frac{ab^2}{l_i^2}$	0	$-P\frac{a^2}{l_i^2}(1+\frac{2b}{l_i})$	$-\frac{Pa^2b}{l_i^2}$
3.	a, b, M	0	$-6M\frac{ab}{l_i^3}$	$M\frac{b}{l_i^2}(3a-l_i)$	0	$6M\frac{ab}{l_i^3}$	$M\frac{a}{l_i^2}(3b-l_i)$
4.	q	0	$-\frac{ql_i}{2}$	$\frac{ql_i^2}{12}$	0	$-\frac{ql_i}{2}$	$-\frac{ql_i^2}{12}$
5.	q_1, q, $q_2 = q - q_1$	0	$-\left(\frac{q_1}{2}+\frac{3q_2}{20}\right)l_i$	$\left(\frac{q_1}{12}+\frac{q_2}{30}\right)l_i^2$	0	$-\left(\frac{q_1}{2}+\frac{7q_2}{20}\right)l_i$	$-\left(\frac{q_1}{12}+\frac{q_2}{20}\right)l_i^2$
6.	n	$-\frac{nl_i}{2}$	0	0	$-\frac{nl_i}{2}$	0	0
7.	Aufstelltemperatur t_{auf} aktuelle Temperatur t_0 $\Delta t = t_0 - t_{auf}$	$EA\,\alpha_T\,\Delta t$	0	0	$-EA\,\alpha_T\,\Delta t$	0	0
8.	$\Delta t = t_2 - t_1$, t_1, t_2	0	0	$EI_y\alpha_T\frac{\Delta t}{h}$	0	0	$-EI_y\alpha_T\frac{\Delta t}{h}$
9.	Stützensenkung Δ_1, Δ_2	0	$-\frac{12EI_y}{l_i^3}(\Delta_2 \mp \Delta_1)$	$\frac{6EI_y}{l_i^2}(\Delta_2 \mp \Delta_1)$	0	$\frac{12EI_y}{l_i^3}(\Delta_2 \mp \Delta_1)$	$\frac{6EI_y}{l_i^2}(\Delta_2 \mp \Delta_1)$

α_T = Temperaturkoeffizient , h = Querschnittshöhe

Tafel 7.1 Stabendkräfte infolge Belastung im Element

Die einzelnen Schritte der Berechnung bei belasteten Stabelementen sind im folgenden zusammengefaßt.

Zusammenfassung des Rechenganges:

(1) Berechnung der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_R$ und $\underline{S}_R$ aller Stabelemente für homogene Randbedingungen der Verformung;

(2) Berechnung der Ersatzknotenlasten $\underline{R}_R$;

(3) Berechnung der Verformungen $\underline{r}$ für $\underline{R} + \underline{R}_R$;

(4) Berechnung der Stabendkräfte $\underline{S}$, $\underline{S}^+$ und $\underline{\bar{S}}^+$;

(5) Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen als Funktionen der lokalen Koordinate $\bar{x}$.

Mit Ersatzknotenlasten kann auch der *Lastfall Temperatur* erfaßt werden. Die Stabendkräfte werden auch hierfür am Element unter *"Temperaturbelastung"* mit homogenen Randbedingungen der Verformung ermittelt. In Tafel 7.1 sind die Stabendkräfte für die übliche Temperaturbelastung aufgenommen. Im übrigen verläuft die Berechnung wie bei einer äußeren Belastung der Elemente.

Durch die Berechnung eines Stabtragwerkes mit Ersatzknotenlasten können damit alle Lastfälle mit *verteilter Belastung* erfaßt werden.

Dieser Rechengang wird im folgenden am Beispiel eines Rahmens für konstante Streckenlast im Riegel gezeigt.

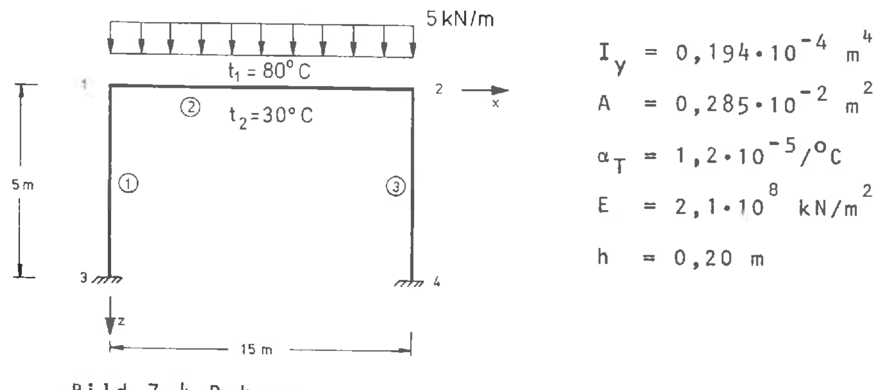


Bild 7.4 Rahmen

Beispiel 7.2:
Der in Bild 7.4 dargestellte Rahmen wird durch eine konstante Streckenlast von 5kN/m belastet. Gleichzeitig wird der Riegel außen um 80°C und innen um 30°C erwärmt.
Die Ermittlung der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_R$ am Element ② nach Bild 7.5 und Tafel 7.1 ergibt:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{R1} &= 0 + 395{,}01 = 395{,}01[\text{kN}]\\
\bar{S}_{R2} &= -37{,}50 + 0 = -37{,}50[\text{kN}]\\
\bar{S}_{R3} &= 93{,}75 - 12{,}22 = 81{,}53[\text{kNm}]\\
\bar{S}_{R4} &= 0 - 395{,}01 = -395{,}01[\text{kN}]\\
\bar{S}_{R5} &= -37{,}50 + 0 = -37{,}50[\text{kN}]\\
\bar{S}_{R6} &= -93{,}75 + 12{,}22 = -81{,}53[\text{kNm}].
\end{aligned}$$

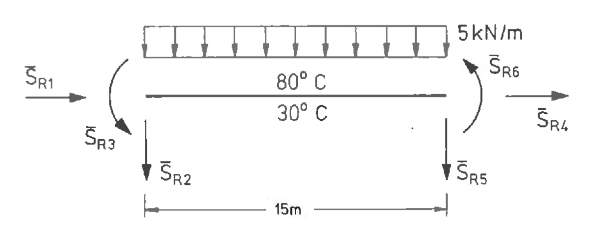


Bild 7.5 Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_R$

In Bild 7.6 sind die sich aus den Stabendkräften $\underline{\bar{S}}_R$ mit den Gleichungen (7.1) und (7.2) ergebenden Ersatzknotenlasten $\underline{R}_R$ in ihren Wirkungsrichtungen am Tragwerk aufgetragen.

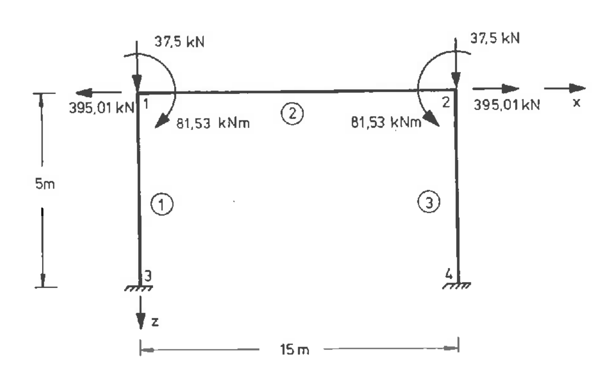


Bild 7.6 Ersatzknotenlasten am Tragwerk

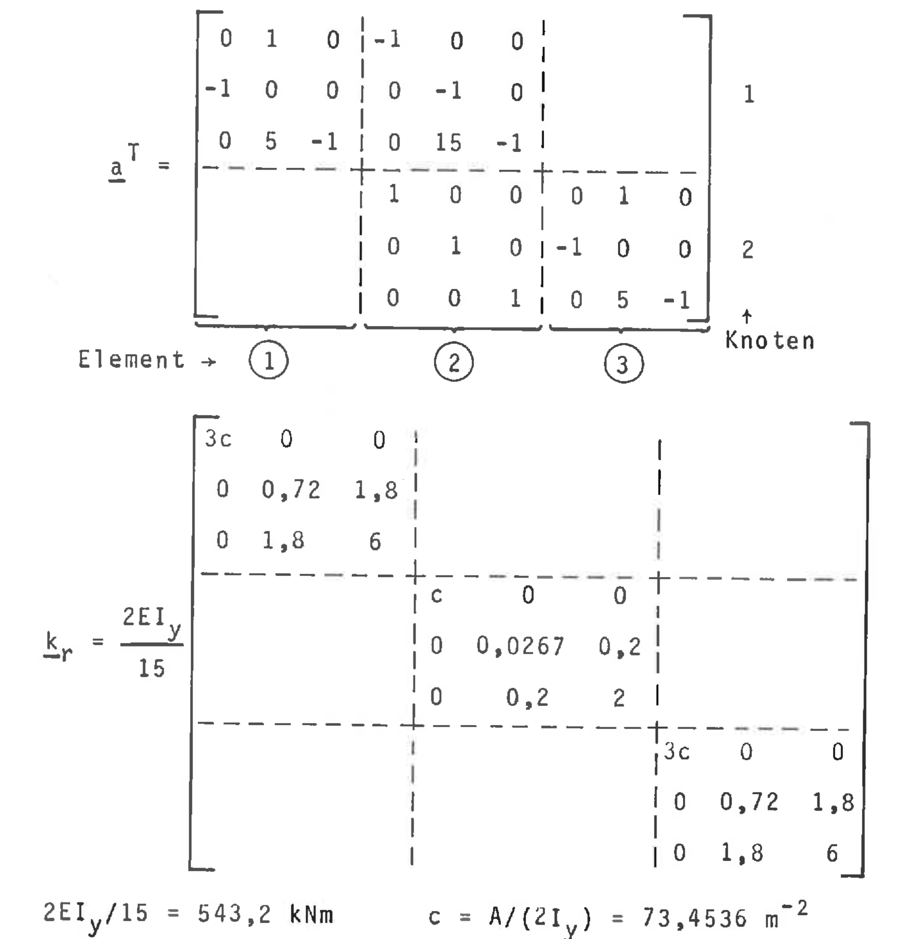
Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ wird mit den im Anhang A3 angegebenen Elementmatrizen für das Balkenelement Typ-b gebildet.

Koordinatentafel

Knoten	x [m]	z
1	0	0
2	15	0
3	0	5
4	15	5

Verknüpfungstafel

Element	Knoten ℓ	Knoten r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	3	5	0	1
②	1	2	15	1	0
③	2	4	5	0	1



$$\underline{a}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 15 & -1 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}$$

Element → ① ② ③ ↑ Knoten

$$\underline{k}_r = \frac{2EI_y}{15}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3c & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0,72 & 1,8 & & & & & & \\ 0 & 1,8 & 6 & & & & & & \\ \hline & & & c & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0,0267 & 0,2 & & & \\ & & & 0 & 0,2 & 2 & & & \\ \hline & & & & & & 3c & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0,72 & 1,8 \\ & & & & & & 0 & 1,8 & 6 \end{array}\right]$$

$2EI_y/15 = 543{,}2$ kNm $\qquad c = A/(2I_y) = 73{,}4536\ m^{-2}$

Als Steifigkeitsmatrix erhält man (Berechnung mit SMIS):

$$\underline{K} = \underline{a}^T \underline{k}_r \underline{a} = 10^3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 40{,}29 & 0 & 0{,}98 & -39{,}90 & 0 & 0 \\ & 119{,}71 & -0{,}11 & 0 & -0{,}01 & -0{,}11 \\ & & 4{,}35 & 0 & 0{,}11 & 0{,}54 \\ \hline & & & 40{,}29 & 0 & 0{,}98 \\ & \text{symmetrisch} & & & 119{,}71 & 0{,}11 \\ & & & & & 4{,}35 \end{array}\right]$$

Mit dem Lastvektor ($\underline{R} = \underline{0}$):

$$(\underline{R} + \underline{R}_R)^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -395 & 37{,}5 & -81{,}5 & 395 & 37{,}5 & 81{,}5 \end{array}\right]$$

erhalten wir als Lösung des Gleichungssystemes $\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R}_R$:

$$\underline{r}^T = 10^{-3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4{,}679 & 0{,}313 & -20{,}238 & 4{,}679 & 0{,}313 & 20{,}238 \end{array}\right] .$$

Den Vektor der linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ erhält man mit (7.4) zu:

$$\underline{F}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -37{,}5 & -21{,}62 & -37{,}56 & 373{,}39 & 0 & 10{,}99 & -37{,}5 & 21{,}62 & 37{,}56 \end{array}\right]$$

Die Stabendkräfte werden mit (7.9) und (7.10) berechnet:

$$\underline{\bar{S}}^1 = \left[\begin{array}{c} 37{,}50 \\ 21{,}62 \\ -70{,}54 \\ \hline -37{,}50 \\ -21{,}62 \\ -37{,}56 \end{array}\right] \qquad \underline{\bar{S}}^3 = \left[\begin{array}{c} 37{,}50 \\ -21{,}62 \\ 70{,}54 \\ \hline -37{,}50 \\ 21{,}62 \\ 37{,}56 \end{array}\right]$$

$$\underline{\bar{S}}^{+2} = \left[\begin{array}{c} -373{,}39 \\ 0 \\ -10{,}99 \\ \hline 373{,}39 \\ 0 \\ 10{,}99 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 395{,}01 \\ -37{,}50 \\ 81{,}53 \\ \hline -395{,}01 \\ -37{,}50 \\ -81{,}53 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 21{,}62 \\ -37{,}50 \\ 70{,}54 \\ \hline -21{,}62 \\ -37{,}50 \\ -70{,}54 \end{array}\right] \quad \text{Dimension [kN, kNm]}$$

Unter Beachtung der Vorzeichendefinition (4.5) lassen sich die Zustandslinien des Rahmens darstellen (Bild 7.7).

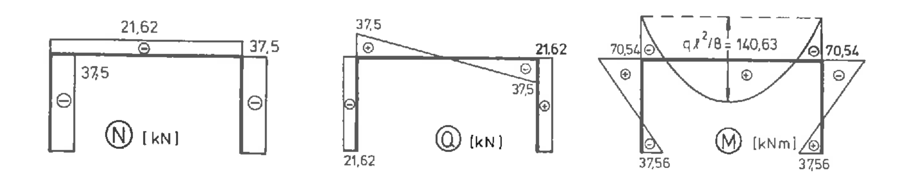


Bild 7.7 Zustandslinien, Dimension [kN, kNm]

7.2 Vorverformungen

Die Berechnung eines Stabtragwerkes mit Vorverformungen ist eine zweite Möglichkeit zur Berücksichtigung von Stabelementen mit verteilter Belastung, mit Temperaturbelastung oder mit Paßungenauigkeiten (Vorverformungen).
Ausgangspunkt sind hierbei *Vorverformungen* der Stabelemente.

Definition 7.2: *Vorverformungen sind Stabendverformungen eines statisch bestimmt gelagerten Stabelementes, die nicht durch Stabendkräfte verursacht werden.*

Mit dieser allgemein gehaltenen Definition ist es möglich, eine Vielzahl von Lastfällen zu erfassen. Beispiele für solche Lastfälle sind in Tafel 7.2 für ein ebenes Stabelement zusammengestellt.
Durch die statisch bestimmte Lagerung ergeben sich Nullkomponenten der Stabendkräfte.
Den Vektor der Stabendkräfte eines Elementes (i) einschließlich der Nullkomponenten bezeichnen wir mit $\underline{\bar{S}}_u^i$.
Durch die zu einem Element gehörende statisch bestimmte Lagerung (Bild 7.8) wird ein Teil der Stabendverformungen

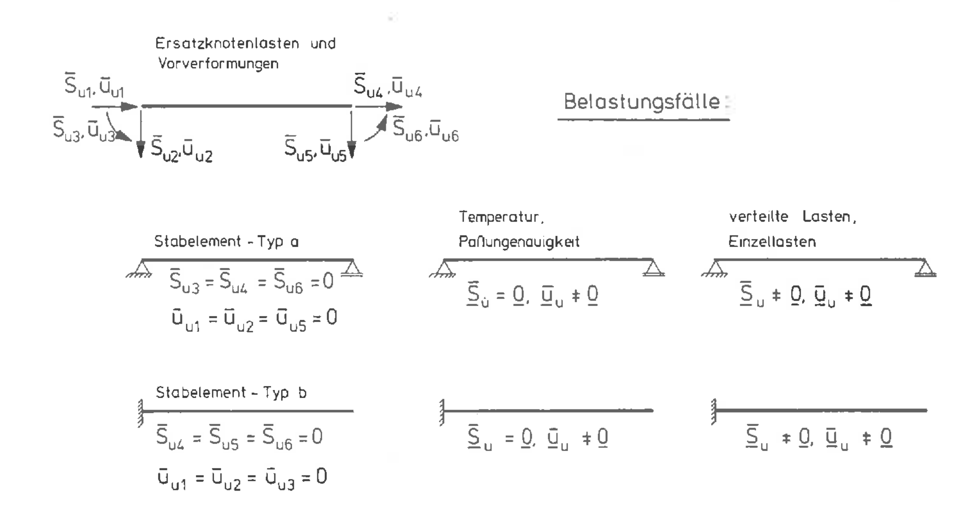


Bild 7.8 Vorverformungen eines ebenen Stabelementes

(Starrkörperverschiebungen) zu Null gesetzt. In Richtung der Nullkomponenten der Stabendkräfte treten infolge der Belastung Stabendverformungen auf. Den Vektor der Stabendverformungen einschließlich der Nullkomponenten bezeichnen wir mit $\bar{\underline{u}}_u^i$.

Für Temperaturbelastung und Paßungenauigkeiten gilt

Satz 7.1: *In einem statisch bestimmten Tragwerk verursachen die Lastfälle Temperatur und Paßungenauigkeit keine Lagerreaktionen.*

Im Element (i) ergibt sich deshalb für die Lastfälle Temperatur und Paßungenauigkeit $\bar{\underline{S}}_u^i = \underline{0}$, (Bild 7.8). Bei allen anderen Lastfällen ist $\bar{\underline{S}}_u^i \neq \underline{0}$.

Für die folgende Ableitung des Rechenganges mit Vorverformungen nehmen wir den allgemeinen Fall mit $\underline{S}_u^i \neq \underline{0}$ an und betrachten den Lastfall Temperatur und Paßungenauigkeiten mit $\bar{\underline{S}}_u^i = \underline{0}$ als Sonderfall.

	LASTFALL	$\bar{u}_{u4}$ (v_{u1})	$\bar{u}_{u5}$ (v_{u2})	$\bar{u}_{u6}$ (v_{u3})	$\bar{S}_{u1}$	$\bar{S}_{u2}$	$\bar{S}_{u3}$
1.	Temperatur $\Delta t = t_2 - t_1$; l_i; t_1, t_2; l, r; $\bar{x}$, $\bar{z}$; Aufstelltemperatur t_{auf}	$\alpha_T l_i \left(\frac{t_1+t_2}{2} - t_{auf}\right)$	$-\alpha_T \frac{\Delta t l_i^2}{2h}$	$\alpha_T \frac{\Delta t l_i}{h}$	0	0	0
2.	Paßungenauigkeit; l_i; Δ	Δ	0	0	0	0	0
3.	q_1, q_2; l_i	0	$\frac{l_i^4(11q_2+4q_1)}{120EI_y}$	$-\frac{l_i^3(3q_2+q_1)}{24EI_y}$	0	$-\frac{q_1+q_2}{2} l_i$	$(2q_2+q_1)\frac{l_i^2}{6}$
4.	$l_i = a + b$; a, b	0	$\frac{Pa^2(b+2l_i)}{6EI_y}$	$-\frac{Pa^2}{2EI_y}$	0	-P	Pa
5.	$l_i = a + b$; a, b	$\frac{Pa}{EA}$	0	0	-P	0	0

α_T = Temperaturkoeffizient
h = Querschnittshöhe

Tafel 7.2 Vorverformungen und Stabendkräfte für Stabelement Typ-b

Zunächst werden $\underline{\bar{u}}_u^i$ und $\underline{\bar{S}}_u^i$ am statisch bestimmt gelagerten, belasteten Stabelement berechnet. Die Vorverformungen $\underline{\bar{u}}_u^i$ können mit dem Arbeitssatz oder mit den Differentialgleichungen der Balkentheorie berechnet werden. Die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_u^i$ erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen des statisch bestimmt gelagerten Elementes.
Für die häufigsten Lastfälle sind die Ergebnisse in Tafeln zusammengestellt (Tafel 7.2).
Mit den bekannten Drehungsmatrizen (3.4) werden $\underline{\bar{u}}_u^i$ und $\underline{\bar{S}}_u^i$ auf globale Koordinaten transformiert:



$$\underline{u}_u^i = \underline{L}_D^i \, \underline{\bar{u}}_u^i \, , \tag{7.12}$$

$$\underline{S}_u^i = \underline{L}_D^i \, \underline{\bar{S}}_u^i \, . \tag{7.13}$$

Durch Verbindung der einzelnen Elemente zum Gesamtsystem entstehen zusätzliche, elastische Stabendverformungen $\underline{u}$. Die Summe der elastischen und der Vorverformungen $\underline{u}_u$ muß die Verträglichkeitsbedingung in den Knotenpunkten erfüllen, die sich nach (5.16) wie folgt darstellt:

$$\underline{u} + \underline{u}_u = \underline{C}^T \, \underline{r} \, . \tag{7.14}$$

Bekanntlich gilt für die elastischen Stabendverformungen:

$$\underline{S} = \underline{k} \, \underline{u} \, . \tag{7.15}$$

Die kontragrediente Transformation von (7.14) ergibt die Knotenlasten:

$$\underline{R} = \underline{C} \, (\underline{S} + \underline{S}_u) \, . \tag{7.16}$$

Durch Auflösen von (7.14) nach

$$\underline{u} = \underline{C}^T \, \underline{r} - \underline{u}_u$$

und Einsetzen in (7.15) erhält man:

$$\underline{S} = \underline{k} \, (\underline{C}^T \, \underline{r} - \underline{u}_u) \, . \tag{7.17}$$

Mit (7.16) folgt weiter:

$$\underline{C}\,\underline{k}\,\underline{C}^T\,\underline{r} = \underline{R} - \underline{C}\,\underline{S}_u + \underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u \ . \qquad (7.18)$$

Dies ist identisch mit:

$$\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R} + \underline{R}_u + \underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u \ . \qquad (7.19)$$

Durch Vergleich mit (7.3) erkennt man, daß der Vektor der Ersatzknotenlasten $\underline{R}_R$ hier aus zwei Anteilen besteht: den Ersatzknotenlasten $\underline{R}_u$ und dem Anteil der Vorverformungen $\underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u$

$$\underline{R}_R = \underline{R}_u + \underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u \ . \qquad (7.20)$$

Die Stabendverformungen sind nach (7.14) die Summe der elastischen Stabendverformungen und der Vorverformungen. Die elastischen Anteile der Stabendkräfte $\underline{S}$ erhält man aus (7.17).
Die Stabendkräfte des tatsächlichen Stabwerkes sind:

$$\underline{S}^+ = \underline{S} + \underline{S}_u \ . \qquad (7.21)$$

Die Rücktransformation auf lokale Koordinaten erfolgt wie üblich mit der Drehungsmatrix $\underline{L}_D$:

$$\underline{\bar{S}}^+ = \underline{L}_D^T\,\underline{S}^+. \qquad (7.22)$$

Die einzelnen Schritte des Rechenganges sind im folgenden zusammengefaßt.

Zusammenfassung des Rechenganges:

(1) Berechnung der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}_u$ und der Vorverformungen $\underline{\bar{u}}_u$;
(2) Berechnung der Ersatzknotenlasten $\underline{R}_u$ und der Vorverformungsanteile $\underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u$;
(3) Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens mit den Lasten $\underline{R} + \underline{R}_u + \underline{C}\,\underline{k}\,\underline{u}_u$;
(4) Rückrechnung der Stabendkräfte durch Superposition;
(5) Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen wie in Abschnitt 7.1.

Die Berechnung mit Vorverformungen wird durch ein Beispiel erläutert:

Beispiel 7.3:
Für den in Beispiel 7.2 berechneten Rahmen unter Temperatur und konstanter Streckenlast (Bild 7.4) sollen der Lastvektor infolge Vorverformnugen und Ersatzknotenlasten aufgestellt und die Stabendkräfte berechnet werden.
Aus Tafel 7.2 ergibt sich für die Lastfälle konstante Streckenlast und ungleichmäßige Temperaturerhöhung folgender Vektor der Vorverformungen:

$$\underline{u}_u^2 \equiv \underline{\bar{u}}_u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0{,}0099 \\ 0{,}3375 \\ -0{,}0450 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 7{,}7665 \\ -0{,}6904 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0{,}0099 \\ 8{,}1040 \\ -0{,}7354 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{rad, m}]$$

(Temperatur) (konst. Streckenlast)

Die Elementsteifigkeitsamtrix $\underline{k}^2$ wird nach Anhang A3 gebildet:

$$\underline{k}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 39900 & 0 & 0 & -39900 & 0 & 0 \\ & 14{,}485 & -108{,}64 & 0 & -14{,}485 & -108{,}64 \\ & & 1086{,}4 & 0 & 108{,}64 & 543{,}20 \\ \hline & & & 39900 & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & 14{,}485 & 108{,}64 \\ & & & & & 1086{,}4 \end{array}\right]$$

Die Transformation auf globale Koordinaten nach (7.12) und die Verknüpfung zum Gesamttragwerk ergibt damit für den

Lastvektor $\underline{C}\ \underline{k}\ \underline{u}_u$:

$$\underline{C}\ \underline{k}\ \underline{u}_u = \begin{bmatrix} -395{,}01 \\ -37{,}50 \\ 480{,}95 \\ \hline 395{,}01 \\ 37{,}50 \\ 81{,}50 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{kN, kNm}]$$

Aus Tafel 7.2 ergibt sich für den Lastfall konstante Streckenlast folgender Vektor der Stabendkräfte:

$$\underline{S}_u^2 \equiv \underline{\bar{S}}_u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -75{,}0 \\ 562{,}5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{kN, kNm}]$$

Mit $\underline{S}_u^2$ werden die Ersatzknotenlasten $\underline{R}_u$ nach (7.18) und (7.19) berechnet und zu $\underline{C}\ \underline{k}\ \underline{u}_u$ addiert. Nach Gleichung (7.20) ergibt sich der in Beispiel 7.2 berechnete Ersatzknotenlastvektor $\underline{R}_R$:

$$\underline{R}_R = \begin{bmatrix} -395{,}01 \\ -37{,}5 \\ 481{,}0 \\ \hline 395{,}01 \\ 37{,}5 \\ 81{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \\ -562{,}5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -395{,}01 \\ 37{,}5 \\ -81{,}5 \\ \hline 395{,}01 \\ 37{,}5 \\ 81{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{kN, kNm}]$$

Mit der Steifigkeitsmatrix von Beispiel 7.2 werden die Kno-

tenverformungen $\underline{r}$ berechnet:

$$\underline{r}^T = 10^{-3}\left[-4{,}679 \;\; 0{,}313 \;\; -20{,}238 \;\middle|\; 4{,}679 \;\; 0{,}313 \;\; 20{,}238\right] .$$

Die Transformation auf Elementverformungen nach Gleichung (7.14) ergibt:

$$\underline{u}^1 = 10^{-3}\begin{bmatrix} -4{,}679 \\ 0{,}313 \\ -20{,}238 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}^3 = 10^{-3}\begin{bmatrix} 4{,}679 \\ 0{,}313 \\ 20{,}238 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^2 = 10^{-3}\begin{bmatrix} -4{,}679 \\ 0{,}313 \\ -20{,}238 \\ \hline 4{,}679 \\ 0{,}313 \\ 20{,}238 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0{,}0099 \\ 8{,}1040 \\ -0{,}7354 \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -4{,}679 \\ 0{,}313 \\ -20{,}238 \\ \hline -5{,}221 \\ -8103{,}687 \;\; \cancel{-810{,}087} \\ 755{,}64 \end{bmatrix}$$

Dimension [rad, m]

Damit können die Stabendkräfte mit den Gleichungen (7.15) und (7.21) bestimmt werden:

$$\underline{S}^1 = \begin{bmatrix} -21{,}62 \\ 37{,}50 \\ -70{,}54 \\ \hline 21{,}62 \\ -37{,}50 \\ -37{,}56 \end{bmatrix} \quad \underline{S}^3 = \begin{bmatrix} 21{,}62 \\ 37{,}50 \\ 70{,}54 \\ \hline -21{,}62 \\ -37{,}50 \\ 37{,}56 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{S}}^1 = \begin{bmatrix} -37{,}50 \\ -21{,}62 \\ -70{,}54 \\ \hline 37{,}50 \\ 21{,}62 \\ -37{,}56 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{S}}^3 = \begin{bmatrix} -37{,}50 \\ 21{,}62 \\ 70{,}54 \\ \hline 37{,}50 \\ -21{,}62 \\ 37{,}56 \end{bmatrix}$$

Dimension [kN, kNm]

$\underline{\bar{S}}^{+2}$ erhält man aus

$$\underline{\bar{S}}^{+2} \equiv \underline{S}^{+2} = \underline{k}^{2}\,\underline{u}^{2} + \underline{S}_{u}^{2}:$$

$$\underline{\bar{S}}^{+2} = \begin{bmatrix} 21{,}62 \\ 37{,}50 \\ -492{,}94 \\ \hline -21{,}62 \\ -37{,}50 \\ -70{,}51 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ 562{,}5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}62 \\ -37{,}50 \\ 70{,}56 \\ \hline -21{,}62 \\ -37{,}50 \\ -70{,}51 \end{bmatrix} \qquad \text{Dimension [kN, kNm]}$$

7.3 Zwangsverformungen der Lager

Bei der statischen Berechnung größerer Tragwerke ist häufig der Lastfall "Stützensenkung", "Widerlagerverschiebung" oder "Widerlagerverdrehung" zu berücksichtigen. Mit diesen Lastfällen soll der Einfluß einer *vorgegebenen Knotenverformung* (Zwangsverformung) auf das Tragwerk erfaßt werden. Die Ursache solcher Zwangsverformung sind üblicherweise Setzungen des Baugrundes. Die Zwangsverformungen können jedoch auch als Verschiebungswege von Hubvorrichtungen vorgegeben sein (Bild 7.9).

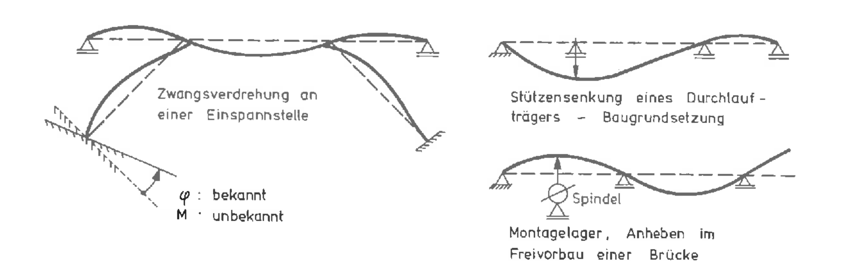


Bild 7.9 Beispiele für Zwangsverformungen

Zusammenfassend führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

Definition 7.3: *Zwangsverformungen* $\underline{r}_z$ *sind vorgegebene (bekannte) Verformungen des Tragwerkes.*

In Richtung der Zwangsverformungen können sich die äußeren Kräfte (Lagerreaktionen) frei einstellen (vgl. Def. 4.2). Diese Lagerreaktionen werden mit $\underline{R}_z$ bezeichnet. Für die Berechnung wird in Richtung aller Verformungskomponenten, also auch in Richtung der bekannten Zwangsverformungen, die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens formuliert:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r} \\ \underline{r}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{R}_z \end{bmatrix} \qquad (7.23)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \qquad (7.24)$$

ist dieselbe wie für ein Tragwerk mit bekannten Knotenlasten

$$(\underline{R}^+)^T = \begin{bmatrix} \underline{R}^T & \underline{R}_z^T \end{bmatrix}$$

und Knotenverformungen

$$(\underline{r}^+)^T = \begin{bmatrix} \underline{r}^T & \underline{r}_z^T \end{bmatrix} .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird jedoch davon ausgegangen, daß im Vektor der Knotenverformungen $\underline{r}^+$ die unbekannten Verformungskomponenten r_i vor den bekannten Komponenten r_{zi} angeordnet sind. Damit sind auch die Untermatrizen $\underline{K}_{ij}$ nach (7.24) in der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ festgelegt.

Gleichung (7.23) ist ein System von zwei gekoppelten Matrizengleichungen.

Die einzelnen Gleichungen sind:

$$\underline{K}_{11}\ \underline{r} + \underline{K}_{12}\ \underline{r}_z = \underline{R}\ , \tag{7.25}$$

$$\underline{K}_{21}\ \underline{r} + \underline{K}_{22}\ \underline{r}_z = \underline{R}_z\ . \tag{7.26}$$

Wegen der Symmetrie (vgl. (~~5.11~~ 6.6)) von $\underline{K}$ gilt:

$$\underline{K}_{12} = \underline{K}_{21}^T\ . \tag{7.27}$$

Aus (7.25) können die unbekannten Knotenverformungen bestimmt werden; man erhält:

$$\underline{K}_{11}\ \underline{r} = \underline{R} - \underline{K}_{12}\ \underline{r}_z\ , \tag{7.28}$$

oder

$$\underline{r} = \underline{K}_{11}^{-1}\ (\underline{R} - \underline{K}_{12}\ \underline{r}_z)\ . \tag{7.29}$$

Üblicherweise wird jedoch die Lösung des Gleichungsystemes (7.28) der Inversion von $\underline{K}_{11}$ und der nachfolgenden Bildung des Matrizenproduktes vorgezogen.
Durch Einsetzen der Lösung $\underline{r}$ in (7.26) erhält man die unbekannten äußeren Kraftgrößen $\underline{R}_z$ als Lagerreaktionen in Richtung der vorgegebenen Zwangsverformungen.
Die Berechnung der Stabendkräfte erfolgt mit den Knotenverformungen

$$(\underline{r}^+)^T = \left[\underline{r}^T\ \underline{r}_z^T\right] \tag{7.30}$$

nach dem Weggrößenverfahren. In den diesbezüglichen Gleichungen des Weggrößenverfahrens (Kapitel 6) ist $\underline{r}$ durch $\underline{r}^+$ zu ersetzen; die einzelnen Matrizen sind durch den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ nach (7.24) bekannt.
Der Rechengang wird durch das folgende einfache Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 7.4:
Für den in Bild 7.10 dargestellten einhüftigen Rahmen werden die Knotenverformungen für eine Stützensenkung des Knotens 3 um 0,5 m berechnet.

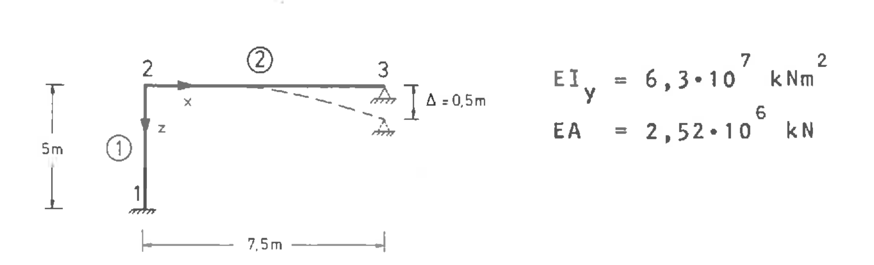


Bild 7.10 Einhüftiger Rahmen mit Stützensenkung

Die Steifigkeitsmatrix stellt man mit einem der in Abschnitt 6.2 oder 6.3 beschriebenen Verfahren auf:

$$\underline{K} = 10^6 \left[\begin{array}{ccc|c|c} 6{,}384 & 0 & 15{,}12 & 0 & 0 \\ & 2{,}296 & -6{,}72 & -1{,}792 & -6{,}72 \\ & & 84 & 6{,}72 & 16{,}8 \\ \hline & \text{symmetrisch} & & 1{,}792 & 6{,}72 \\ \hline & & & & 33{,}6 \end{array}\right]$$

$$r_{2_x} \quad r_{2_z} \quad \Theta_2 \quad r_{3_z} = r_z \quad \Theta_3$$

Durch Umordnung wird der Freiheitsgrad der Zwangsverschiebung der letzten Zeile und Spalte von $\underline{K}$ zugeordnet. Die Einteilung entsprechend Gleichung (7.23) ergibt:

$$\underline{K} = 10^6 \left[\begin{array}{cccc|c} 6{,}384 & 0 & 15{,}12 & 0 & 0 \\ & 2{,}296 & -6{,}72 & -6{,}72 & -1{,}792 \\ & & 84 & 16{,}8 & 6{,}72 \\ & \text{symmetrisch} & & 33{,}6 & 6{,}72 \\ \hline & & & & 1{,}792 \end{array}\right]$$

$$r_{2_x} \quad r_{2_z} \quad \Theta_2 \quad \Theta_3 \quad r_{3_z} = r_z$$

Für den Lastvektor nach Gleichung (7.28) erhält man mit $r_z = 0{,}5$ m und $\underline{R} = \underline{0}$:

$$\underline{R} - \underline{K}_{12}\, r_z = 10^6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}896 \\ -3{,}360 \\ -3{,}360 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{kN, kNm}]$$

Die Lösung des Gleichungssystemes (7.28) ist:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} 0{,}0754 \\ 0{,}1229 \\ -0{,}0319 \\ -0{,}0595 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{2_x} \\ r_{2_z} \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension } [\text{m}]$$

Die Stabendkräfte werden mit $\underline{r}^+$ nach Gleichung (7.30) berechnet.

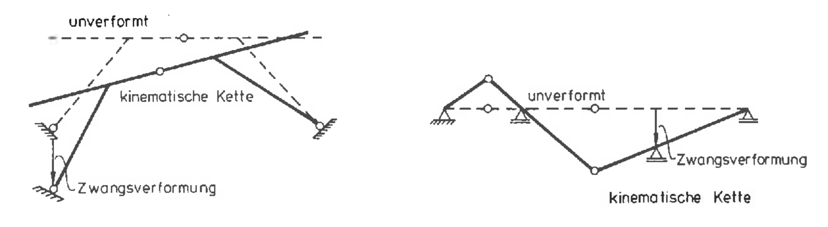
Die Berechnung nach dem Weggrößenverfahren ist unabhängig von der Redundanz des Tragwerkes. Vorausgesetzt wird nur, daß die Knotenverformungen linear unabhängig sind. Mit Bezug auf die Berechnung mit Zwangsverformungen bedeutet dies, daß das Tragwerk unverschieblich sein muß. Es muß sich also eine nichtsinguläre Matrix $\underline{K}_{11}$ ergeben (vgl. (7.23)).

Mit dem Weggrößenverfahren können auch statisch bestimmte Tragwerke mit Zwangsverformungen berechnet werden. Die Berechnung mit Zwangsverformungen in einem statisch bestimmten Tragwerk ist jedoch nicht sinnvoll, denn es gilt

Satz 7.2: *In einem statisch bestimmten System entstehen durch Zwangsverformungen der Auflager keine Schnittgrößen.*

Ein statisch bestimmtes Tragwerk wird nämlich durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Verformung zu einer *kinematischen Kette*. Die Stabelemente einer kinematischen Kette verhalten sich wie starre Körper und übertragen keine inne-

ren Kräfte.
Dieser Zusammenhang ist in Bild 7.11 an zwei Beispielen - einem Dreigelenkbogen und einem statisch bestimmten Durchlaufträger (Gerberträger nach A. Gerber 1832-1912) - dargestellt.

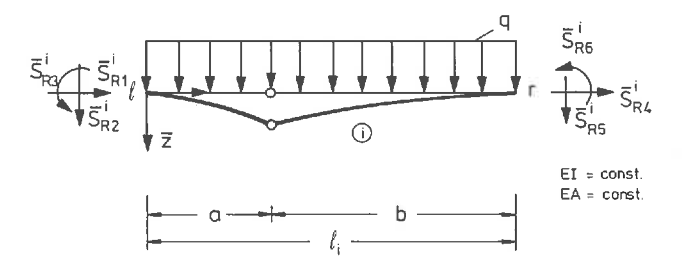


Dreigelenkbogen Gerberträger

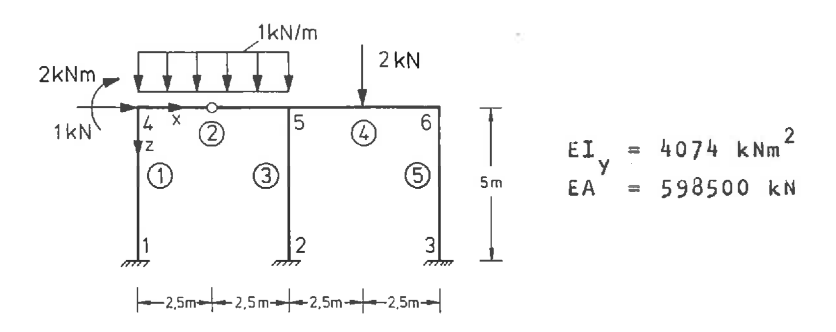
Bild 7.11 Zwangsverformungen statisch bestimmter Stabtragwerke

Aufgaben:

7.1 Für ein Element mit einem Momentengelenk im Innern ist der Vektor der Stabendkräfte $\bar{\underline{S}}_R^i$ nach dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Verfahren für eine konstante Streckenlast zu bestimmen.



7.2 Für den dargestellten Rahmen ist der Vektor der Ersatzknotenlasten aufzustellen. Die Schnittgrößen sind zu ermitteln und graphisch darzustellen.



7.3 Für ein Element mit Momentengelenk im Innern ist der Vektor der Vorverformungen $\underline{\overline{u}}_u^i$ und der Stabendkräfte $\underline{\overline{S}}_u^i$ nach dem in Abschnitt 7.2 beschriebenen Verfahren für eine konstante Streckenlast zu bestimmen (siehe Aufgabe 7.1).

7.4 Der Rahmen von Aufgabe 7.2 ist über Vorverformungen zu berechnen.

7.5 Der Rahmen von Aufgabe 7.2 ist für eine zusätzliche Zwangsverdrehung des Lagers 1 um 10° entgegen dem Uhrzeigersinn zu berechnen.

8 Die Berechnung von Einflußlinien nach dem Weggrößenverfahren

Viele Tragwerke werden durch Lasten beansprucht, die in einem festgelegten Bereich zeitlich ihren Angriffspunkt ändern. Die Verteilung und der Wirkungssinn der Lasten bleiben hierbei erhalten.

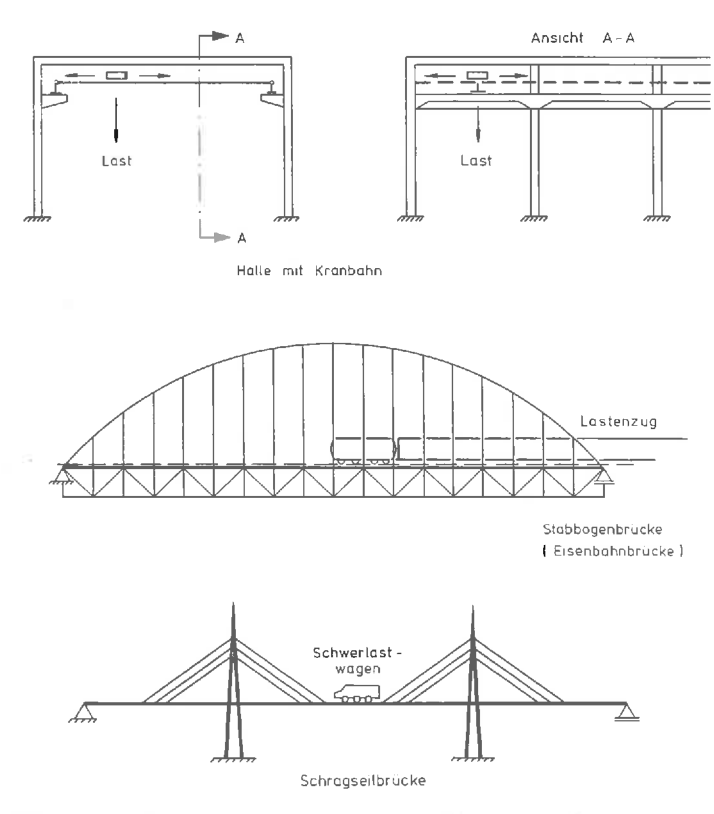


Bild 8.1 Tragwerke mit beweglicher Belastung

Beispiele solcher Tragwerke sind in Bild 8.1 dargestellt; es sind dies Krankonstruktionen mit planmäßig veränderlicher Laststellung, Kranbahnen in Hallentragwerken und Brückentragwerke des Straßen- oder Eisenbahnbaus mit Verkehrslasten.

Durch die beweglichen Lasten werden dynamische Kräfte hervorgerufen. Im allgemeinen können diese Kräfte durch eine Erhöhung der statischen Belastung und durch eine Abminderung der zulässigen Spannungen genügend genau erfaßt werden. In diesen Fällen ist eine Berechnung mit *quasi-statischer* Belastung zulässig. Eine Berechnung nach den Verfahren der Baustatik, die wir bisher kennengelernt haben, würde jedoch wegen der veränderlichen Laststellungen einen erheblichen Aufwand verursachen.
Bei einer Berechnung mit *Einflußlinien* läßt sich der Rechenaufwand reduzieren. Diese Berechnungsverfahren sind Gegenstand der folgenden Abschnitte.

8.1 Grundlagen des Rechnens mit Einflußlinien

Die Berechnung erfolgt im wesentlichen in zwei Schritten:
Zunächst ersetzt man die bewegliche Lastgruppe *(Lastenzug)* durch eine gleichgerichtete Einheitskraftgröße, durch eine *"wandernde Einheitslast"*. Der *Einfluß* dieser Einheitslast auf eine Kraft- oder Verformungsgröße wird durch die *Einflußlinie* ausgedrückt.
In einem zweiten Rechenschritt, dem *Auswerten* der Einflußlinie, wird der Einfluß der beweglichen Lastgruppe unter Anwendung des Superpositionsprinzips mit Hilfe der Einflußlinie berechnet.
Die einzelnen Begriffe bedürfen einer Präzisierung.
Der Bereich, den die bewegliche Lastgruppe überdeckt, bezeichnen wir als *Belastungsbereich*. Der Belastungsbereich wird durch eine Folge von Elementnummern beschrieben, die den Weg des Lastenzuges kennzeichnen. Beispiele zur Beschreibung des Belastungbereiches sind in Bild 8.2 dargestellt.
Die Belastung wurde bisher immer in globalen Koordinaten angegeben. Diese Vereinbarung behalten wir auch für den Lastenzug bei.

Definition 8.1: *Die Ordinaten des Lastenzuges sind den Achsen des globalen Koordinatensystems gleichgerichtet. Positive Lastordinaten weisen in Richtung der positiven Achsen des globalen Koordinatensystems.*

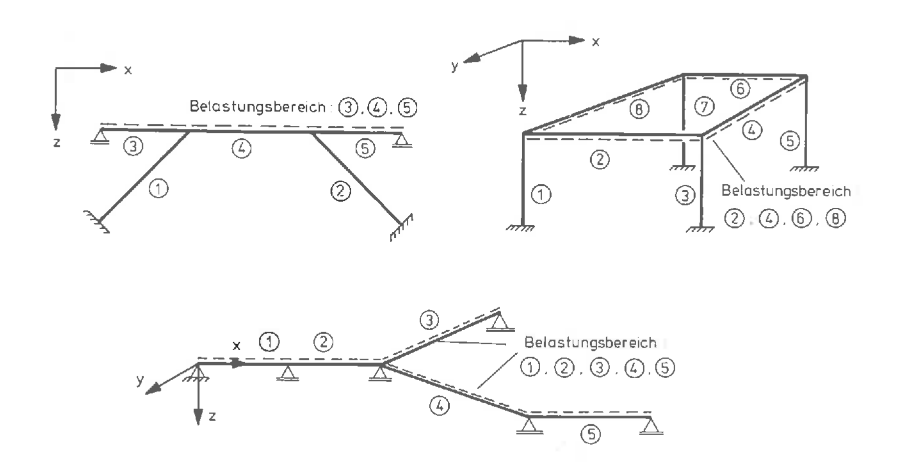


Bild 8.2 Belastungsbereich

Üblicherweise ist der Lastenzug durch Berechnungsvorschriften festgelegt (Bild 8.3). Die Lastverteilung dieser beweglichen Lastgruppen ist nur für die Auswertung der Einflußlinie von Bedeutung. Wir werden auf dieses Problem an späterer Stelle zurückkommen.
Für die Berechnung der Einflußlinien ist die Festlegung der Einheitslast wichtig; hierfür gilt die

Definition 8.2: *Die Einheitslast ist die positive Einheit der Lastordinate des Lastenzuges.*

Beispiele für Einheitslasten sind in Bild 8.3 angegeben:
Für einen Lastenzug aus Einzelkräften oder aus verteilten Kräften ist die Einheitslast eine Kraft vom Betrag 1.
Für einen Lastenzug aus Einzelmomenten oder aus einer verteilten Momentenbelastung ist die Einheitslast ein Moment vom Betrag 1.

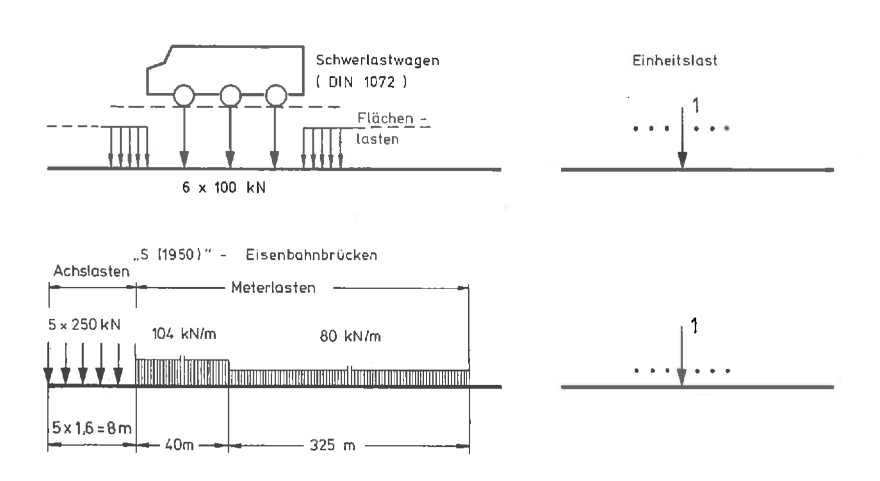


Bild 8.3 Beispiele für Lastenzüge und Einheitslasten

Wir kommen nun zu einer ausführlichen Beschreibung der Einflußlinie. Im wesentlichen gibt es zwei verschiedene Typen von Einflußlinien, nämlich

Einflußlinien für Weggrößen und
Einflußlinien für Kraftgrößen.

Weg- und Kraftgrößen sind punktweise in dem gesamten Tragwerk definiert. In unserer diskreten Betrachtungsweise sind die Kraftgrößen entweder Stabendkräfte oder Auflagerreaktionen als Linearkombinationen von Stabendkräften. Die Weggrößen sind Knotenverformungen oder Linearkombinationen derselben, so z.B. bei Relativverformungen.
Die Beschreibung einer Einflußlinie erfordert deshalb immer mehrere Angaben:

die Weg- oder Kraftgröße,
die Einheitslast und
den Belastungsbereich im Tragwerk.

Man spricht so z.B. von einer
"Einflußlinie für eine Knotenverformung r_i infolge einer

Einheitskraft (oder eines Einheitsmomentes) im Bereich B des Stabwerkes",
oder von einer
"Einflußlinie für eine Stabendkraft $\overline{S}_i^k$ am Element ⓚ infolge einer Einheitskraft (oder eines Einheitsmomentes) im Bereich B".
Der Funktionswert einer Einflußlinie ist also eine Weg- oder Kraftgröße des Tragwerkes; die unabhängigen Variablen sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Einheitslast im Belastungsbereich. Aus historischen Gründen wird die Einflußlinie, als graphische Darstellung des funktionalen Verlaufs, selbst als Funktion bezeichnet. Zusammenfassend gilt:

Definition 8.3: *Die Einflußlinie für eine Weg- oder Kraftgröße ist eine Funktion der Koordinaten des Belastungsbereiches. Die Funktionswerte sind die Werte der Weg- oder Kraftgröße die durch eine Einheitslast im Belastungsbereich auftreten.*

Zur deutlichen Unterscheidung der Einflußlinien von Zustandsgrößen werden neue Bezeichnungen eingeführt:
Eine Einflußlinie wird prinzipiell mit dem Buchstaben g bezeichnet.
Durch den Buchstaben g soll angedeutet werden, daß Einflußlinien eigentlich Komponenten der Green'schen Funktion sind /11/. Dieser Zusammenhang wird hier nicht vertieft.
Die Einflußlinie mit Beschränkung auf Teilbereiche ⓘ des Belastungsbereiches wird mit g_i bezeichnet.
Die Teilbereiche sind die Elemente des Belastungsbereiches.
Den funktionalen Charakter der Einflußlinie drücken wir durch Angabe der Variablen aus: Wir setzen
$g(x)$ für die Einflußlinie im gesamten Bereich B und
$g_i(\overline{x})$ für die Einflußlinie im Element ⓘ.
Es ist meist aus der Aufgabenstellung ersichtlich, für wel-

che Weg- oder Kraftgröße g ermittelt wird; wo dies nicht der Fall ist, und Verwechslungen möglich sind, ergänzen wir die Bezeichnungsweise auf sinnvolle Weise, so z.B. durch

$g_i(\bar{x}, r_j)$ - für eine Weggröße r_j oder

$g_i(\bar{x}, S_j^k)$ - für eine Kraftgröße $\bar{S}_j^k$ im Element (k).

Die Einheitslast wird üblicherweise nur in der Aufgabenstellung gekennzeichnet.

8.2 Einflußlinien für Knotenverformungen

Der Ausgangspunkt für die Berechnung ist die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens (6.7):

$$\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}\ .$$

$\underline{K}$ ist symmetrisch und invertierbar. Die Inverse $\underline{K}^{-1}$ der symmetrischen Matrix $\underline{K}$ ist wieder symmetrisch:

$$\underline{r} = \underline{\delta}\ \underline{R} \tag{8.1}$$

$$\text{mit} \quad \underline{\delta} = \underline{K}^{-1}\ .$$

Diese Symmetrieeigenschaft von $\underline{\delta}$ läßt sich mechanisch interpretieren. Wir betrachten hierzu die i-te Zeile von (8.1):

$$r_i = \delta_{i1} R_1 + \delta_{i2} R_2 + \ldots + \delta_{in} R_n\ .$$

Für eine spezielle Belastung $\underline{R}_j$

$$\underline{R}_j = \{R_j = 1 \text{ und } R_k = 0 \text{ für } k \neq j\}$$

erhält man:

$$r_i = \delta_{ij}\ .$$

Eine zweite Belastung $\underline{R}_i$ ergibt

$$r_j = \delta_{ji}\ .$$

Aufgrund der Symmetrie ist

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} ;$$

also gilt auch für die *Verformungskomponenten infolge von Einheitslasten:*

$$r_i = r_j \qquad (8.2)$$

Dies ist die Aussage des *Satzes von Maxwell* /39/:

Satz 8.1: *Die Verformung r_i eines elastischen Tragwerkes infolge einer Einheitslast $R_j = 1$ ist gleich der Verformung r_j infolge einer Einheitslast $R_i = 1$.*

Die Gültigkeit dieses Satzes haben wir hier anhand der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix gezeigt. Der übliche Beweis des Satzes erfolgt mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten; er wird hier als bekannt vorausgesetzt /39/.
Selbstverständlich sind beide Betrachtungweisen identisch, da auch die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten aufgestellt wird.
Einige einfache Beispiele zur Erläuterung des Satzes sind in Bild 8.4 skizziert.
Eine Einheitslast $R_j = 1$ (Bild 8.4 (a)) erzeugt die Verschiebung r_i; dieselbe Verschiebung $r_i = r_j$ erhält man durch eine Einheitslast $R_i = 1$.
Im zweiten Beispiel (Bild 8.4 (b)) wird gezeigt, daß die Gleichung auch für Verschiebungen und Verdrehungen gilt:
Ein Einheitsmoment $R_j = 1$ erzeugt die Verschiebung r_i; dieselbe Verschiebung $r_i = r_j$ erhält man durch eine Einheitslast $R_i = 1$. Hierbei ist r_j eine Verdrehung und wird im Bogenmaß (rad) angegeben.
Am dritten Beispiel (Bild 8.4 (c)) wird die Gültigkeit für einen Trägerrost gezeigt. Der Satz von Maxwell gilt für alle linearen Tragwerke, so z.B. auch für Schalen und Kontinua mit linear-elastischem Werkstoff und kleinen Verformungen.

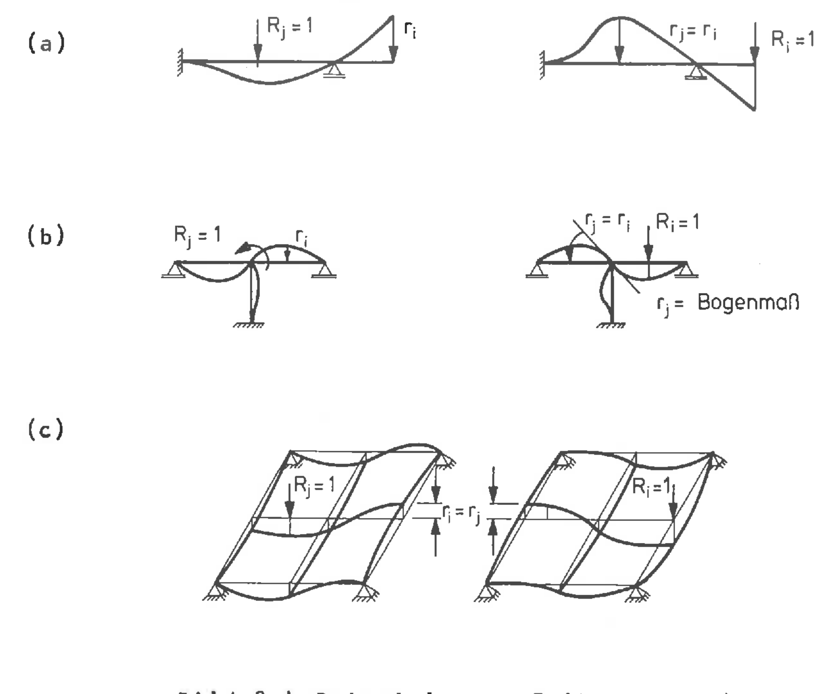
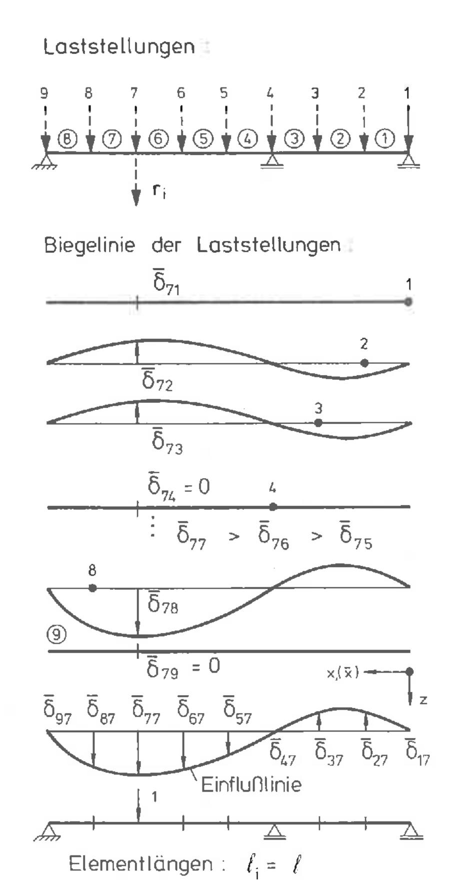
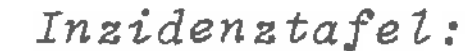


Bild 8.4 Beispiele zur Erläuterung des Satzes von Maxwell (Satz 8.1)

Der Satz von Maxwell ist die Grundlage für die Berechnung von Einflußlinien.
Wir erläutern den Gedankengang, der zur Berechnung von Einflußlinien mit Hilfe des Satzes von Maxwell führt, zunächst an einem Beispiel (Bild 8.5).

Beispiel 8.1:
Es wird die Ermittlung der Einflußlinie für eine Weggröße r_i in einem Zweifeldträger gezeigt. Die Einheitslast ist eine Einzelkraft.
Der Belastungsbereich wird durch 8 Elemente beschrieben. Die Verformungen für die einzelnen Laststellungen sind in Bild 8.5 qualitativ skizziert. Die Verformungswerte in Richtung von r_i bezeichnen wir mit $\overline{\delta}_{ki}$; k ist der Belastungspunkt.





Inzidenztafel:

Element	Knoten ℓ	Knoten r
①	1	2
②	2	3
③	3	4
④	4	5
⑤	5	6
⑥	6	7
⑦	7	8
⑧	8	9

Einflußlinie = Biegelinie

$$g_1(0) = \bar{\delta}_{17} \quad (=\bar{\delta}_{71})$$
$$g_2(0) = \bar{\delta}_{27}$$
$$g_3(0) = \bar{\delta}_{37}$$
$$g_4(0) = \bar{\delta}_{47}$$
$$g_5(0) = \bar{\delta}_{57}$$
$$g_6(0) = \bar{\delta}_{67}$$
$$g_7(0) = \bar{\delta}_{77}$$
$$g_8(0) = \bar{\delta}_{87}$$
$$g_8(\ell) = \bar{\delta}_{97}$$

Bild 8.5 Beispiel zur Ermittlung einer Einflußlinie

Mit dem Satz von Maxwell erhält man die Verschiebung $\bar{\delta}_{71} = 0$ entweder als Verschiebung im Punkt 7 infolge einer Last 1 im Punkt 1 oder als Verschiebung im Punkt 1 infolge einer Last 1 im Punkt 7.
Der Wert $g_1(0)$ der Einflußlinie im Punkt 1 ist also gleich

$\bar{\delta}_{71}$ und identisch mit dem Wert der Biegelinie im Punkt 1 infolge einer Last 1 im Punkt 7.
Dieselbe Überlegung gilt für alle anderen Laststellungen; so erhält man z.B. $\bar{\delta}_{78}$ entweder als Verschiebung im Punkt 7 infolge einer Last 1 im Punkt 8 oder als Verschiebung im Punkt 8 infolge einer Last 1 im Punkt 7.
Die Biegelinie des Trägers infolge einer Last 1 im Punkt 7 ist damit gleich der gesuchten Einflußlinie.
In allgemeiner Form kann der Zusammenhang zwischen dem Satz von Maxwell und den Einflußlinien für eine Weggröße wie folgt ausgedrückt werden:

Satz 8.2: *Die Einflußlinie für eine Weggröße $g(x, r_i)$ infolge einer wandernden Einheitslast in x (variabel) ist identisch mit der dieser Einheitslast gleichgerichteten Verformung des Belastungbereiches, die sich unter der ortsfesten Belastung $R_i = 1$, $(R_j = 0$ für $i \neq j)$ einstellt.*

Damit ist die Berechnung von Einflußlinien für Weggrößen auf eine Verformungsberechnung zurückgeführt.
Zur näheren Erläuterung geben wir einige Beispiele (Bild 8.6) an.
Die Berechnung der Einflußlinien für Weggrößen ist eine Verformungsberechnung und besteht damit bekanntlich (vgl. Biegelinie) aus zwei Teilen:
Im <u>ersten Schritt</u> werden die Knotenverformungen $\underline{r}$ des Tragwerkes berechnet,
im <u>zweiten Schritt</u> die Verformungen der Stabelemente als Funktion der Elementkoordinaten.
Die Berechnung der Knotenverformungen $\underline{r}$ infolge der Belastung $\underline{R}_i = \{R_i = 1,\ R_j = 0$ für $j \neq i\}$ erfordert eine Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R}_i \ . \qquad (8.3)$$

Damit sind die Stützstellen der Einflußlinie bekannt: Es sind die zur wandernden Einheitslast korrespondierenden

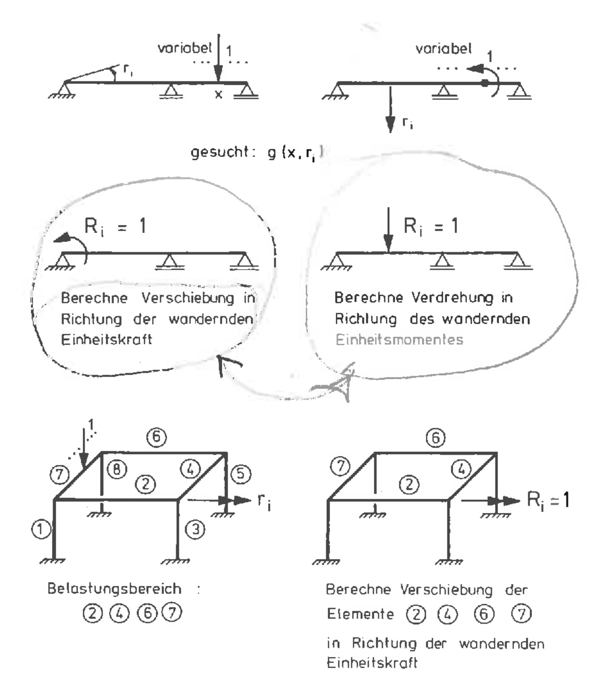


Bild 8.6 Beispiele zum Berechnungsverfahren für Einflußlinien für Weggrößen

Knotenverformungen im Belastungsbereich.
Die Berechnung der Einflußlinien zwischen den Knotenpunkten der Stabelemente kann über die Integration der Grundgleichungen der Balkentheorie erfolgen.
Die hierzu erforderlichen Randbedingungen der Verformungen sind die Knotenverformungen oder auch die Komponenten u_i^j (globale Koordinaten) der Stabendverformung, die man aus

$$\underline{u} = \underline{C}^T \underline{r}$$

erhält.
Für die Berechnung der Verformungen in den Elementen ⓘ des Belastungsbereiches werden aus $\underline{u}$ die Elementvektoren $\underline{u}^i$ ausgewählt.
Die Einflußlinie wird mit den Stabendverformungen in Richtung der wandernden Einheitslast (also in globalen Koordi-

naten) und mit den Verdrehungen analog zu der Berechnung der Biegelinie (Abschnitt 5.4) ermittelt. Die Einflußlinie ist ein Polynom dritter Ordnung; für gleichgerichtete globale x und lokale $\bar{x}$-Koordinaten ist:

$$g_j(\bar{x}, r_i) = C_1\,\bar{x}^3 + C_2\,\bar{x}^2 + C_3\,\bar{x} + C_4 \,. \qquad (8.4)$$

Für das ebene Stabelement (j) des Belastungsbereiches gelten folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} g_j(0, r_i) &= u_2^j \\ g_j(\ell_j, r_i) &= u_5^j \\ -g_j'(0, r_i) &= u_3^j \\ -g_j'(\ell_j, r_i) &= u_6^j \,. \end{aligned} \qquad (8.5)$$

Für die Konstanten $C_1, \ldots, C_4$ erhält man (vgl. (5.22)):

$$\begin{aligned} C_1 &= (2(u_2^j - u_5^j) - (u_3^j + u_6^j)\ell_j)/\ell_j^3 \,, \\ C_2 &= (u_3^j - u_6^j)/(2\ell_j) - 1{,}5\; C_1\, \ell_j \,, \\ C_3 &= -u_3^j \,, \\ C_4 &= u_2^j \,. \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Der Extremwert (Maximum oder Minimum) in einem Element kann über die Nullstellen der ersten Ableitungen der Einflußlinie berechnet werden. Extremwerte für g_j ergeben sich entweder in

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1/2} &= (-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 3C_1\, C_3})/(3C_1) \,, \\ &0 < \bar{x}_1 < \ell_j \,, \quad 0 < \bar{x}_2 < \ell_j \,, \end{aligned} \qquad (8.7)$$

oder in den Randpunkten des Elementes.

Die Berechnung einer

Einflußlinie für eine Knotenverformung r_i infolge einer wandernden Einheitslast

ist im folgenden zusammenfassend dargestellt:

(1) Festlegung des Belastungsbereiches als Folge von Elementnummern;

(2) Festlegung des Lastvektors $\underline{R}$ für $\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}$, ($R_i = 1$, $R_j = 0$ für $j \neq i$), R_i ist die zu r_i korrespondierende Kraftgröße;

(3) Verformungsberechnung - Berechnung der Lösung $\underline{r}$ von $\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}$;

(4) Bestimmung der Elementverformungen aus $\underline{u}$ mit $\underline{u} = \underline{C}^T\ \underline{r}$;

(5) Berechnung der Einflußlinie in Abhängigkeit der lokalen Koordinate $\overline{x}$ in den einzelnen Stabelementen als Biegelinie unbelasteter Stabelemente mit Randverformungen. Die Randverformungen sind Komponenten von $\underline{u}$.

Wir erläutern diesen Rechengang an einem Beispiel.

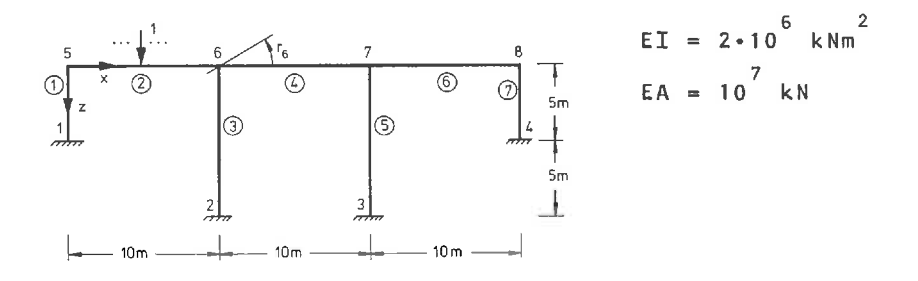


Bild 8.7 Rahmensystem mit wandernder Einheitslast

Beispiel 8.2:

Für das in Bild 8.7 dargestellte Stabtragwerk ist die Einflußlinie für die Verdrehung r_6 des Knotens 6 zu ermitteln.

Die korrespondierende Knotenlast ist das Einheitsmoment im Knoten 6 ($R_6 = 1$).

Mit der in Bild 8.7 angegebenen Numerierung werden die Koordinatentafel und die Verknüpfungstafel aufgestellt.

Koordinatentafel

Knoten	x [m]	z
1	0	5
2	10	10
3	20	10
4	30	5
5	0	0
6	10	0
7	20	0
8	30	0

Verknüpfungstafel

Element	Knoten ℓ	Knoten r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	5	5	0	-1
②	5	6	10	1	0
③	2	6	10	0	-1
④	6	7	10	1	0
⑤	3	7	10	0	-1
⑥	7	8	10	1	0
⑦	4	8	5	0	-1

$\cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$,

$\sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$

Nach dem in Kapitel 6.3 beschriebenen Verfahren kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ gebildet werden:

$$\underline{K} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overset{1}{\underline{k}}_{55}+\overset{2}{\underline{k}}_{55} & \overset{2}{\underline{k}}_{56} & & \\ \hline & \overset{2}{\underline{k}}_{66}+\overset{3}{\underline{k}}_{66}+\overset{4}{\underline{k}}_{66} & \overset{4}{\underline{k}}_{67} & \\ \hline & \text{symmetrisch} & \overset{4}{\underline{k}}_{77}+\overset{5}{\underline{k}}_{77}+\overset{6}{\underline{k}}_{77} & \overset{6}{\underline{k}}_{78} \\ \hline & & & \overset{6}{\underline{k}}_{88}+\overset{7}{\underline{k}}_{88} \end{array}\right]$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\underline{K} = 10^4 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 119{,}2 & 0 & 48 & -100 & 0 & 0 & & & & & & \\ & 202{,}4 & -12 & 0 & -2{,}4 & -12 & & \underline{0} & & & \underline{0} & \\ & & 240 & 0 & 12 & 40 & & & & & & \\ \hline & & & 202{,}4 & 0 & 12 & -100 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 104{,}8 & 0 & 0 & -2{,}4 & -12 & & \underline{0} & \\ & & & & & 240 & 0 & 12 & 40 & & & \\ \hline & & & & & & 202{,}4 & 0 & 12 & -100 & 0 & 0 \\ & & \text{symmetrisch} & & & & & 104{,}8 & 0 & 0 & -2{,}4 & -12 \\ & & & & & & & & 240 & 0 & 12 & 40 \\ \hline & & & & & & & & & 119{,}2 & 0 & 48 \\ & & & & & & & & & & 202{,}4 & -12 \\ & & & & & & & & & & & 240 \end{array}\right]$$

Lastvektor:

$$\underline{R}^T = \left[0 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad 0 \quad 1 \;\vdots\; 0 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad 0 \quad 0\right].$$

Die Lösung des Gleichungssystems (6.7) ergibt für die Knotenverformungen $\underline{r}$:

$$\underline{r} = 10^{-8} \begin{bmatrix} -4{,}271 \\ 2{,}268 \\ -6{,}485 \\ \hline -8{,}204 \\ -0{,}179 \\ 44{,}768 \\ \hline -6{,}962 \\ -4{,}855 \\ -7{,}528 \\ \hline -6{,}790 \\ 0{,}249 \\ 2{,}357 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{5x} \\ r_{5z} \\ \Theta_5 \\ \hline r_{6x} \\ r_{6z} \\ \Theta_6 \\ \hline r_{7x} \\ r_{7z} \\ \Theta_7 \\ \hline r_{8x} \\ r_{8z} \\ \Theta_8 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension [rad, m]}$$

Für die Ermittlung der Biegelinie nach Kapitel 5.4 bleiben die Knotenverformungen in x-Richtung unberücksichtigt. Der Lastbereich erstreckt sich über die Elemente (2), (4) und (6).

Aus $\underline{r}$ können die Elementverformungen $\underline{u}^i$ mit Gleichung (5.16) berechnet werden:

$$\underline{u}^2 = 10^{-8} \begin{bmatrix} -4{,}271 \\ 2{,}268 \\ -6{,}485 \\ \hline -8{,}204 \\ -0{,}179 \\ 44{,}768 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^4 = 10^{-8} \begin{bmatrix} -8{,}204 \\ -0{,}179 \\ 44{,}768 \\ \hline -6{,}962 \\ -4{,}855 \\ -7{,}528 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^6 = 10^{-8} \begin{bmatrix} -6{,}962 \\ -4{,}855 \\ -7{,}528 \\ \hline -6{,}790 \\ 0{,}249 \\ 2{,}357 \end{bmatrix}$$

Für das Element ② werden die Konstanten $C_1, \dots, C_4$ für die Einflußlinie nach Gleichung (8.6) ermittelt:

$$C_1 = (2(2{,}268+0{,}179)-10(-6{,}485+44{,}768))10^{-8}/1000$$

$$= -0{,}37794 \cdot 10^{-8} \ ,$$

$$C_2 = ((-6{,}485-44{,}768)/20+15 \cdot 0{,}37794)10^{-8} = 3{,}1064 \cdot 10^{-8} \ ,$$

$$C_3 = 6{,}485 \cdot 10^{-8} \ ,$$

$$C_4 = 2{,}268 \cdot 10^{-8} \ .$$

Die Einflußlinie in Element ② ergibt sich nach Gleichung (8.4) zu:

$$g_2(\overline{x}, r_6) = (-0{,}37794\overline{x}^3+3{,}1064\overline{x}^2+6{,}485\overline{x}+2{,}268)10^{-8} \ .$$

Die Einflußlinien in den Elementen ④ und ⑥ werden analog bestimmt:

$$g_4(\overline{x}, r_6) = (-0{,}36305\overline{x}^3+8{,}0605\overline{x}^2-44{,}768\overline{x}-0{,}179)10^{-8} \ ,$$

$$g_6(\overline{x}, r_6) = (0{,}04150\overline{x}^3-1{,}11678\overline{x}^2+7{,}528\overline{x}-4{,}855)10^{-8} \ .$$

In Bild 8.8 ist die Einflußlinie graphisch dargestellt.

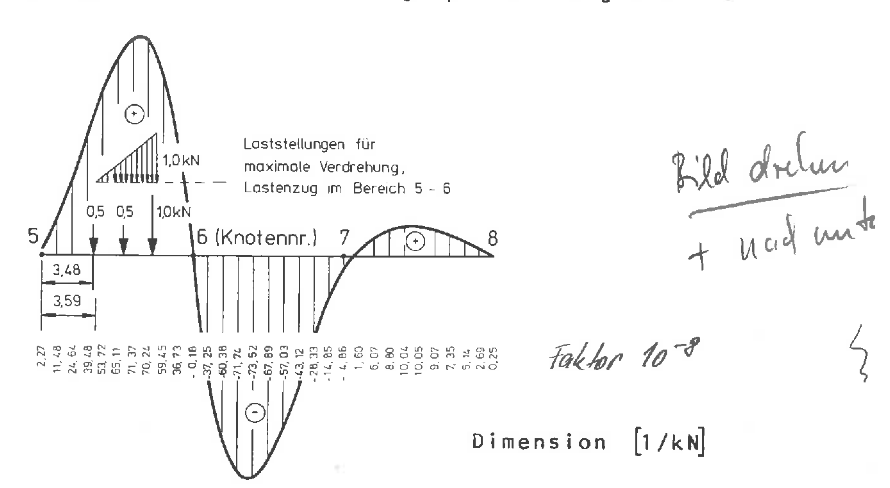


Bild 8.8 Einflußlinie $g(x, r_6)$ für die Verdrehung des Knotens 6

Im folgenden zeigen wir für zwei Lastenzüge die Auswertung der in Bild ~~8.6~~ 8.8 dargestellten Einflußlinie.

Beispiel 8.3:

Es ist die maximale Verdrehung r_6 des Knotens 6 (Bild 8.7) für die Lastenzüge (a) und (b) (Bild 8.9) im Element ② gesucht.

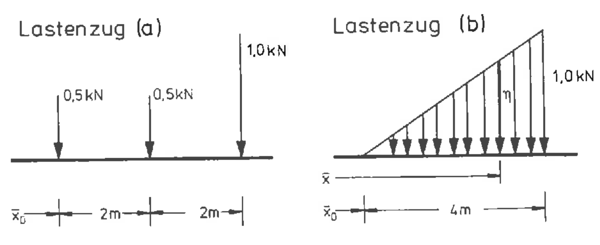


Bild 8.9 Lastenzüge

Die Einflußlinie für r_6 infolge einer wandernden Einheitskraft, die den Lastordinaten dieser Lastenzüge gleichgerichtet ist, wird in Beispiel 8.2 berechnet. Wir übernehmen diese Ergebnisse und zeigen im folgenden die *Auswertung der Einflußlinie*.

Nach Beispiel 8.2 ist

$$g_2(\bar{x},r_6) = (-0{,}37794\bar{x}^3+3{,}1064\bar{x}^2+6{,}485\bar{x}+2{,}268)10^{-8} \quad . \qquad (8.8)$$

Für eine Kraft R in $0 < \bar{x}_0 < \ell_2$, die der Einheitskraft gleichgerichtet ist, gilt:

$$r_6 = R \cdot g_2(\bar{x}_0,r_6) \quad .$$

Für den Lastenzug (a) gilt entsprechend (Superposition):

$$r_6 = 0{,}5\ g_2(\bar{x}_0,r_6) + 0{,}5\ g_2(\bar{x}_0+2,r_6) + 1{,}0\ g_2(\bar{x}_0+4,r_6) \ ;$$

$\bar{x}_0$, $\bar{x}_0+2$, $\bar{x}_0+4$ sind die Angriffspunkte der Kräfte des Lastenzuges (a). Durch Einsetzen in die Einflußlinie erhält man:

$$r_6 = (-0{,}75588\bar{x}_0^3 + 0{,}54370\bar{x}_0^2 + 23{,}625\bar{x}_0 + 67{,}176)10^{-8} \quad .$$

Gesucht ist das Maximum von r_6. Durch Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt sich:

$$\bar{x}_0 = 3{,}48 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \max(r_6) = 1{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ rad.}$$

Es muß geprüft werden, ob für diesen Wert alle Lasten im Bereich des Elementes ② stehen:

$$\bar{x}_0 + 4 = 3{,}48 + 4 < 10 \,[\text{m}] \,.$$

Die Laststellung ist in Bild 8.8 eingetragen.

Für den Lastenzug (b) ist die Berechnung aufwendiger. Zunächst ist der Lastenzug als Funktion von $\bar{x}$ und $\bar{x}_0$ darzustellen (Bild 8.9). Der Wert einer Lastordinate η ist

$$\frac{\eta}{\bar{x} - \bar{x}_0} = \frac{1{,}0}{4} \,, \quad \eta = (\bar{x} - \bar{x}_0)/4 \,.$$

Die Verdrehung r_6 unter dem Lastenzug erhält man als Integral:

$$r_6(\bar{x}_0) = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_0+4} \eta(\bar{x}_0, \bar{x}) \; g_2(\bar{x}, r_6) \; d\bar{x} \tag{8.9}$$

Durch Einsetzen von (8.8) und η ergibt sich:

$$r_6 = \frac{10^{-8}}{4} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_0+4} (\bar{x} - \bar{x}_0)(C_1\bar{x}^3 + C_2\bar{x}^2 + C_3\bar{x} + C_4)d\bar{x} \tag{8.10}$$

mit $C_1 = -0{,}37794$, $C_2 = 3{,}1064$,

$C_3 = 6{,}48500$, $C_4 = 2{,}2680$

nach Beispiel 8.2.

Die Berechnung des Integrals führt auf ein Polynom 5. Ordnung. Gesucht ist der Wert $0 < \bar{x}_0 < 6$ m , bei dem das Maximum von r_6 erreicht wird. Die obere Grenze von $\bar{x}_0$ wird auf 6 m beschränkt, da nur in diesem Bereich der gesamte Lastenzug im Element ② steht.

Das Integral (8.10) wird für eine Reihe von Punkten $\bar{x}_{0i}$ mit

festem Abstand berechnet. Der Maximalwert von r_6 wird durch Intervallschachtelung ermittelt. Man erhält die Lösung:

$$\overline{x}_o = 3{,}59 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \max(r_6) = 1{,}37 \cdot 10^{-6} \text{ rad} .$$

Es muß geprüft werden, ob die Last im Bereich des Elementes (2) steht:

$$\overline{x}_o + 4 = 3{,}59 + 4 < 10 \text{ [m]} .$$

Die Laststellung ist in Bild 8.8 eingetragen.
Anmerkung: Die Berechnungen sind, selbst bei diesen einfachen Lastenzügen, sehr aufwendig. In der Praxis behilft man sich vielfach durch Abschätzen der Laststellungen anhand von genauen, maßstäblichen Darstellungen der Einflußlinie. Die zeitgemäße Auswertung von Einflußlinien erfolgt mit Computerprogrammen: Der Lastenzug wird systematisch, in Intervallen von $\overline{x}$, über den Bereich B verschoben. Die Laststellungen für die Extremwerte werden durch Intervallschachtelung berechnet. Die meisten Integrale werden mit numerischen Integrationsverfahren approximiert.

8.3 Einflußlinien für Relativverformungen

Bei verschiedenen Tragwerken müssen zur Gewährleistung der Brauchbarkeit die gegenseitigen Verformungen gewisser Knotenpunkte eingeschränkt werden. Dies kann z.B. im Gelenkpunkt einer Brücke (Bild 8.10) der Fall sein. Ursache der Einschränkung ist in diesem Fall die konstruktive Ausbildung des Gelenkes: Bei der Überschreitung der maximal zulässigen Verformung würde das Gelenk zerstört oder die Gelenkwirkung aufgehoben. Die Berechnung muß deshalb den Nachweis erbringen, daß die gegenseitige Verdrehung in jedem Lastfall kleiner ist als eine zulässige Verdrehung $\max \varphi$.
Gegenseitige Verformungen von Knotenpunkten oder gegenseitige Verdrehungen von Stäben sind Relativverformungen.

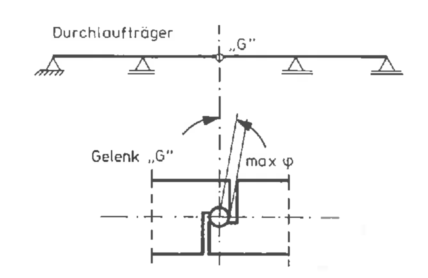


Bild 8.10 Beispiel zur Einschränkung einer gegenseitigen Verformung

Wir bezeichnen eine Relativverformung mit d. Sie läßt sich als Linearkombination der Knotenverformungen darstellen:

$$d = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_n r_n ,$$

$$\text{oder} \quad d = \underline{\alpha}^T \underline{r} . \tag{8.11}$$

Mit den Konstanten α_i wird die Relativverformung beschrieben; diese Konstanten ergeben sich aus den Systemeigenschaften. Die Ermittlung der α_i wird anhand von Beispielen erläutert (s.u.). Wir nehmen zunächst an, die α_i seien bekannt.

Aus der Linearität des Tragwerkes folgt unmittelbar

Satz 8.3: *Die Einflußlinie eines Tragwerkes ist eine lineare Funktion in den Verformungsgrößen:*

$$g(x,r_i) + g(x,r_j) = g(x,r_i+r_j)$$

$$\text{und} \quad g(x,\alpha_i r_i) = \alpha_i \, g(x,r_i) . \tag{8.12}$$

Damit ergibt sich g(x,d) durch Superposition der einzelnen Einflußlinien nach (8.11):

$$g(x,d) = \alpha_1 \, g(x,r_1) + \ldots + \alpha_n \, g(x,r_n) . \tag{8.13}$$

Eine direkte Berechnung durch Superposition wäre zu umständlich, da mehrere Einflußlinien zu berechnen wären.

Dies ist jedoch nicht erforderlich, denn es gilt:

Satz 8.4: *Die Knotenverformungen* $\underline{r}$ *für die Berechnung einer Einflußlinie g(x,d) mit*

$$d = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_n r_n$$

erhält man aus

$$\underline{K}\ \underline{r} = \underline{\alpha} \equiv \underline{R} . \qquad (8.14)$$

Diese Aussage ist eine direkte Folgerung aus den Sätzen 8.2 und 8.3.

Die weitere Berechnung der Einflußlinie erfolgt wie in Abschnitt 8.2 über die Knotenverformungen (Elementverformungen).
Wir erläutern die Berechnung durch einige Beispiele.

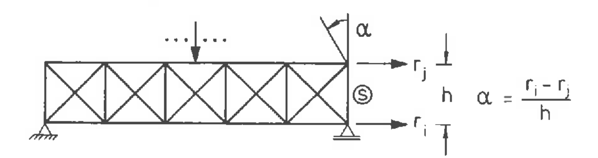


Bild 8.11 Verdrehung eines Fachwerkstabes

Beispiel 8.4:
Gesucht ist der Lastvektor $\underline{R}$ für die Berechnung einer Einflußlinie für eine Stabdrehung des Stabes (S) (Bild 8.11). Die Lösung kann aus Bild 8.11 direkt abgelesen werden; es ist

$$R_i = 1/h \ ; \quad R_j = -1/h$$

und $R_k = 0$ für alle übrigen Lastkomponenten.

Beispiel 8.5:
Gesucht ist der Lastvektor $\underline{R}$ für die Berechnung einer Einflußlinie für die gegenseitige Verdrehung in einem Gelenk (Bild 8.12).

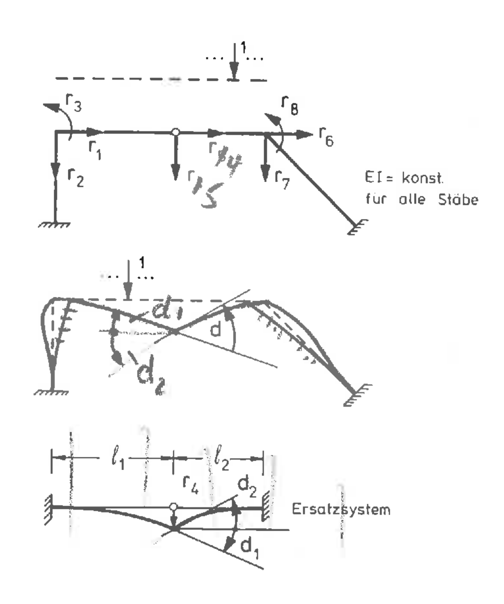


Bild 8.12 Gegenseitige Verdrehung in einem Gelenk

Zunächst wird ein Ersatzsystem betrachtet. Für eine Gelenkverschiebung r_4 erhält man:

$$d_1 = \ldots 1{,}5 \ldots$$

$$d_2 = 1{,}5\, r_4/\ell_2$$

Die gegenseitige Verdrehung im Ersatzsystem ist

$$d' = -d_1 + d_2 \pm \alpha_4 r_4 .$$

Im Gesamtsystem sind die Knotenverdrehungen zu berücksichtigen:

$$d = \alpha_4 r_4 - r_3 + r_8 .$$

Damit ist

$R_4 = \alpha_4$; $R_3 = -1$; $R_8 = 1$.

Alle übrigen Lastkomponenten sind Null.

Um Wiederholungen zu vermeiden, verzichten wir hier auf die vollständige Berechnung einer Einflußlinie für eine Relativverformung. Die weiteren Rechenschritte sind in 8.2 ausführlich dargestellt.

8.4 Einflußlinien für Schnittgrößen

Schnittgrößen sind innere Kraftgrößen (vgl. Abschnitt 3.1); aufgrund des Gegenwirkungsprinzips (vgl. Abschnitt 4.1) treten in einem Schnitt durch einen Stab gegengleich große Schnittkräfte auf. Einer *Schnittgröße* ist deshalb eine *Relativverformung* d der Schnittufer zugeordnet (Bild 8.13).

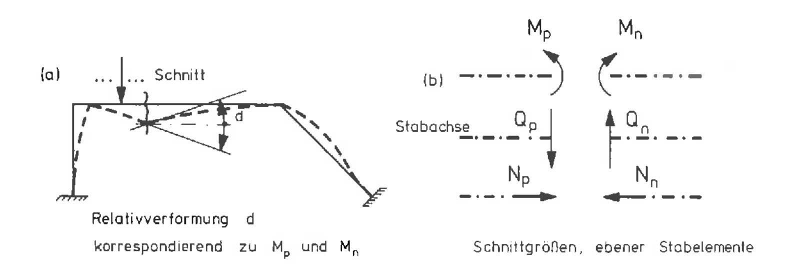


Bild 8.13 Schnittgrößen und korrespondierende Relativverformungen

Wir bezeichnen hier die Schnittgröße, deren Einflußlinie gesucht ist mit $S(x_0)$, die Einheitslast mit P und die dazu korrespondierende Verformung mit $v(x_1)$.
Für eine virtuelle Verrückung $\hat{d}$ gilt mit der inneren Arbeit $\underline{S}^T\hat{\underline{u}}$

$$S(x_0)\,\hat{d} + \hat{v}(x_1)\,P = \underline{S}^T\hat{\underline{u}}.$$

Daraus folgt für P = 1:

$$g(x) \equiv g(x,S) = -\frac{\hat{v}(x)}{\hat{d}} + \frac{\underline{S}^T\hat{\underline{u}}}{\hat{d}}$$

Diese sehr wichtige Aussage wird ausgedrückt durch

Satz 8.5: *Die Einflußlinie für eine Schnittgröße g(x,S) in-*

folge einer wandernden Einheitslast in x (variabel) ist identisch mit der Summe aus der zur Einheitslast gleichgerichteten Verformung des Belastungsbereiches und der negativen inneren Arbeit, die sich unter einer zu S korrespondierenden Relativverformung d = -1 einstellen.

Eine Relativverformung d = -1 kann nur dann vorgegeben werden, wenn ein zusätzlicher Freiheitsgrad der Verformung eingeführt wird.
Durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad verringert sich die Redundanz des Stabwerkes um eins. Die Berechnung von Einflußlinien für Schnittgrößen auf der Grundlage von Satz 8.5 wird deshalb auch als
"*Berechnung von Einflußlinien am (n-1)-fach statisch unbestimmten Tragwerk*" (n: Redundanz) bezeichnet.
Im Falle n = 0 (statisch bestimmt) führt die Anwendung zu Stabtragwerken mit einem Freiheitsgrad der Verformung - zu kinematischen Ketten mit einem Freiheitsgrad (vgl. Abschn. 7.3). Daraus folgt:

> *Die Einflußlinie für eine Schnittgröße (Stabendkraft) eines statisch bestimmten Tragwerkes ist eine bereichsweise lineare Funktion der Koordinaten des Belastungsbereiches.*

Bei einem statisch bestimmten Tragwerk kann deshalb die Einflußlinie für eine Schnittgröße aus den Koordinaten des Belastungsbereiches berechnet werden.
Eine wesentliche Anwendung des Satzes 8.5 ist die qualitative Ermittlung von Einflußlinien. Die Verformungen infolge einer Relativverformung d können gut abgeschätzt und als Rechenkontrolle betrachtet werden. Beispiele für den qualitativen Verlauf von Einflußlinien sind in Bild 8.14 dargestellt.
Für die Berechnung von Einflußlinien mit dem Weggrößenverfahren ist die Anwendung des Satzes 8.5 nur auf indirektem Wege sinnvoll. Dies erkennt man aus folgender Oberlegung: Einflußlinien werden üblicherweise zusammen mit Schnittgrößen berechnet. Für die Berechnung der Schnittgrößen muß die

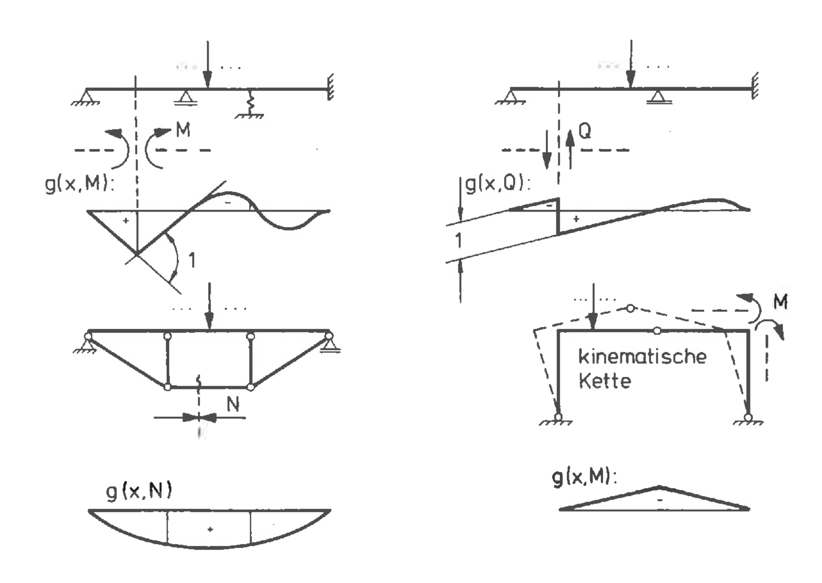


Bild 8.14 Beispiele zur qualitativen Ermittlung von Einflußlinien für Schnittgrößen

Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ berechnet werden. Die Besetzung von $\underline{K}$ erfordert ca. 10 bis 30 % des gesamten Rechenaufwandes. Man wird also jede Änderung des Systems und auch der Gesamtsteifigkeitsmatrix vermeiden, wenn zusätzlich zu einer Berechnung von Zustandslinien noch Einflußlinien zu berechnen sind. Aus der Berechnung der Zustandslinien ist auch die Dreieckszerlegung von $\underline{K}$ bekannt, und es ergibt sich eine weitere, beträchtliche Ersparnis an Rechenoperationen (Größenordnung n^3 für $\underline{K}_{n \times n}$).

Zur Berechnung der Einflußlinien am ursprünglichen System wird von Vorverformungen ausgegangen (Abschnitt 7.2). Wir beschränken uns auf die Berechnung der Einflußlinien für Stabendkräfte und erläutern die zugrundeliegende Vorstellung zunächst an einem Beispiel (Bild 8.15).

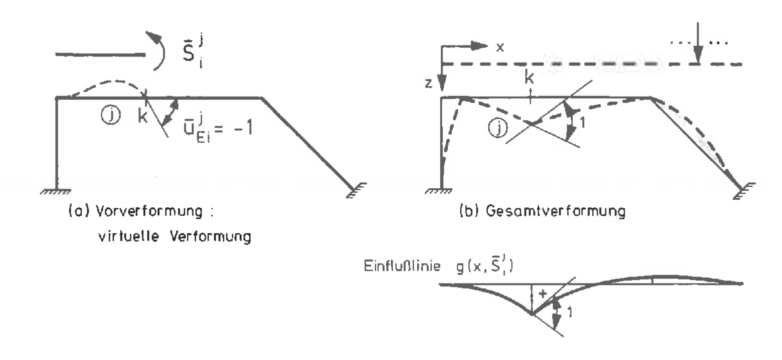


Bild 8.15 Einflußlinie für eine Stabendkraft

Wir gehen von einer Vorverformung $\bar{u}_{Ei}^{j} = -1$ aus (siehe Satz 8.5). Diese Vorverformung kann man sich durch Stabendkräfte erzeugt denken, die ein Gleichgewichtssystem bilden. Diese Stabendkräfte wirken als Reaktionen auf das Tragwerk und erzeugen elastische Verformungen (Bild 8.15 a). Die Summe aus den elastischen Stabendverformungen und den Vorverformungen ergibt die Gesamtverformung. Der Winkel, den die beiden Stäbe im Knoten k bilden, bleibt erhalten; damit ist die Beziehung zu der qualitativen Ermittlung der Einflußlinie aufgrund von Satz 8.5 hergestellt.

Für die allgemeine Darstellung führen wir den Vektor der Vorverformungen $\underline{\bar{u}}_E$ ein,

mit $\bar{u}_{Ej}^{i} = -1$

und $\bar{u}_{Ek}^{\ell} = 0$ für $k \neq j$ und $\ell \neq i$.

Es gilt eine zu Satz 8.5 analoge Aussage:

Satz 8.6: *Die Einflußlinie für eine Stabendkraft $g(x, \bar{S}_j^i)$ infolge einer Einheitslast in x (variabel) ist identisch mit der dieser Einheitslast gleichgerichteten Verformung des Belastungsbereiches, die sich unter einer zu $\bar{S}_j^i$ korrespondierenden Vorverformung $\bar{u}_{Ej}^{i} = -1$ einstellt.*

Die Berechnung erfolgt wie in Abschnitt 7.2.
Zunächst wird $\underline{\bar{u}}_E$ auf globale Koordinaten transformiert:

$$\underline{u}_E = \underline{L}_D \, \underline{\bar{u}}_E \; .$$

Für eine virtuelle Belastung $\underline{\hat{R}}$ gilt:

$$\underline{\hat{S}}^T \, \underline{u}_E + \underline{\hat{R}}^T \, \underline{r} = \underline{\hat{S}}^T \underline{u} . \qquad (8.15)$$

Daraus ergibt sich mit $\underline{\hat{R}} = \underline{C} \, \underline{\hat{S}}$ die Verträglichkeitsbedingung

$$\underline{u}_E + \underline{C}^T \underline{r} = \underline{u} \qquad (8.16)$$

mit den elastischen Verformungen $\underline{u}$.
Die Stabendkräfte

$$\underline{S} = \underline{k} \, \underline{u} \qquad (8.17)$$

müssen die homogene Gleichgewichtsbedingung (vgl. (5.16))

$$\underline{C} \, \underline{S} = \underline{0} \qquad (8.18)$$

erfüllen..Durch Einsetzen von $\underline{u}$ aus (8.16) in (8.17) erhält man für (8.18):

$$\underline{C} \, \underline{k} \, (\underline{C}^T \, \underline{r} + \underline{u}_E) = \underline{0} \qquad (8.19)$$

oder

$$\underline{C} \, \underline{k} \, \underline{C}^T \, \underline{r} = -\underline{C} \, \underline{k} \, \underline{u}_E \; .$$

Mit (6.10) ergibt sich:

$$\underline{K} \, \underline{r} = -\underline{C} \, \underline{k} \, \underline{u}_E \qquad (8.20)$$

Damit können die Stützstellen der Einflußlinie berechnet werden: Es sind die zur Einheitslast korrespondierenden Knotenverformungen im Lastbereich.
Die Berechnung der Einflußlinie zwischen den Knotenpunkten der Stabelemente kann über die Integration der Grundgleichungen der Balkentheorie erfolgen. Die erforderlichen Randbedingungen der Verformung (Integrationskonstante) sind Komponenten von

$$\underline{u} = \underline{C}^T \, \underline{r} + \underline{u}_E \; . \qquad (8.21)$$

Wie bei der Berechnung der Einflußlinie für Knotenverformungen (Abschnitt 8.2) beschränken wir uns auch hier auf spezielle Anwendungen.

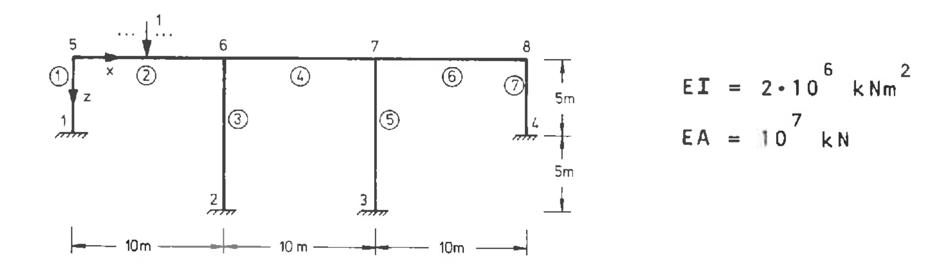


Bild 8.16 Rahmensystem mit wandernder Einheitslast

Beispiel 8.6:

Für das in Bild 8.16 dargestellte Stabtragwerk ist die Einflußlinie für das Moment $\bar{S}_6^4$ infolge einer auf dem Riegel wandernden Einheitslast zu ermitteln. Die korrespondierende Stabendverformung ist die Einheitsverdrehung $\bar{u}_{E6}^4 = -1$.
Der Vektor der Zwangsverformungen am Element ist

$$(\underline{\bar{u}}_E^4)^T \equiv (\underline{u}_E^4)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ und $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$ ist

$$(\underline{k}^4 \ \underline{u}_E^4)^T = \frac{2 \cdot 10^6}{10} \left[0 \quad 0{,}6 \quad -2 \;\vdots\; 0 \quad -0{,}6 \quad -4 \right] .$$

Die Verknüpfung nach Gleichung (8.20) ergibt:

$$(\underline{C} \ \underline{k} \ \underline{u}_E)^T = 10^5 \left[0 \; 0 \; 0 \;\vdots\; 0 \; 1{,}2 \; -4 \;\vdots\; 0 \; -1{,}2 \; -8 \;\vdots\; 0 \; 0 \; 0 \right] .$$

Die Lösung des Gleichungssystems (8.20) ist der Vektor der Knotenverformungen $\underline{r}$.
Die Rücktransformation nach Gleichung (8.21) ergibt die Stabendverformungen $\underline{u}$.

Man erhält die folgenden Knoten- und Elementverformungen:

$$\underline{r} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -92,313 \\ 6,034 \\ 3,674 \\ \hdashline -108,273 \\ -75,673 \\ 113,242 \\ \hdashline -113,243 \\ 95,806 \\ 322,426 \\ \hdashline -82,240 \\ -16,101 \\ -31,694 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{5_x} \\ r_{5_z} \\ \Theta_5 \\ \hdashline r_{6_x} \\ r_{6_z} \\ \Theta_6 \\ \hdashline r_{7_x} \\ r_{7_z} \\ \Theta_7 \\ \hdashline r_{8_x} \\ r_{8_z} \\ \Theta_8 \end{bmatrix} \quad \text{Dimension [rad, m]}$$

$$\underline{u}^2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -92,313 \\ 6,034 \\ 3,674 \\ \hdashline -108,273 \\ -75,673 \\ 113,242 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^4 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -108,273 \\ -75,673 \\ 113,242 \\ \hdashline -113,243 \\ 95,806 \\ -677,574 \end{bmatrix} \quad \underline{u}^6 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -113,243 \\ 95,806 \\ 322,426 \\ \hdashline -82,240 \\ -16,101 \\ -31,694 \end{bmatrix}$$

Mit den Gleichungen (8.4) bis (8.6) kann die Einflußlinie elementweise berechnet werden:

Element ②:

$$g_2(\bar{x}, S_6^4) = 10^{-3}(-1,0057\bar{x}^3 + 9,6078\bar{x}^2 - 3,674\bar{x} + 6,034)$$

Element ④:

$$g_4(\bar{x}, S_6^4) = 10^{-3}(5,3006\bar{x}^3 - 39,9646\bar{x}^2 - 113,242\bar{x} - 75,673)$$

Element ⑥ :

$$g_6(\bar{x},S_6^4) = 10^{-3}(-2,6335\bar{x}^3+57,959\bar{x}^2-322,426\bar{x}+95,806) .$$

Die Einflußlinie ist in Bild 8.17 dargestellt.

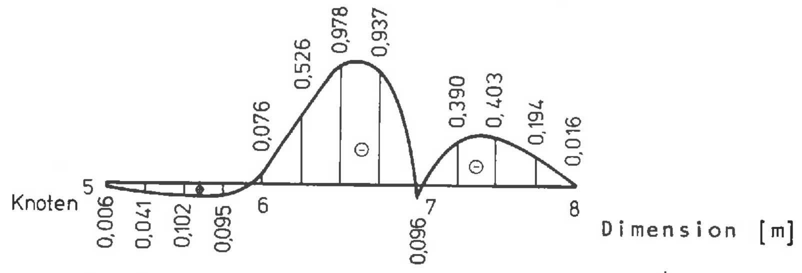


Bild 8.17 Einflußlinie für das Moment $\bar{S}_6^4$

8.5 Einflußlinien für Lagerreaktionen

Lagerreaktionen sind Linearkombinationen von Stabendkräften (vgl. (4.10)):

$$\underline{L}^\ell \; \underline{\tilde{S}}^\ell = \underline{R}^\ell . \tag{8.22}$$

$\underline{\tilde{S}}^\ell$ ist der Vektor der Stabendkräfte, die zum Knotengleichgewicht im Lager beitragen. Komponentenweise gilt:

$$R_i^\ell = L_{i1}^\ell \; \tilde{S}_1^\ell + \ldots + L_{im}^\ell \; \tilde{S}_m^\ell . \tag{8.23}$$

Da für Einflußlinien das Superpositionsgesetz gilt (Satz 8.3), könnte $g(x,R_i^\ell)$ auf einfache Weise aus den Einflußlinien der Stabendkräfte $\tilde{S}_i^\ell$ berechnet werden:

$$g(x,R_i^\ell) = L_{i1}^\ell \; g(x,\tilde{S}_1^\ell) + \ldots + L_{im}^\ell \; g(x,\tilde{S}_m^\ell). \tag{8.24}$$

Im allgemeinen wird dieser Weg zu umständlich sein, da zunächst die Einflußlinien für $\tilde{S}_i^\ell$ berechnet werden müssen. Eine einfache Möglichkeit für die Berechnung der Einflußlinien für Lagerreaktionen bietet sich mit

Satz 8.7: *Die Einflußlinie für eine Lagerreaktion R_i^ℓ infol-*

ge einer Einheitslast in x (variabel) ist identisch mit der dieser Einheitslast gleichgerichteten Verformung des Belastungsbereiches, die sich unter einer zu R_i^ℓ korrespondierenden Zwangsverformung $r_i^\ell = -1$ einstellt.

Wie bei Satz 8.6 ist dies eine unmittelbare Folgerung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten.
Eine anschauliche Darstellung am Beispiel ist in Bild 8.18 gegeben.

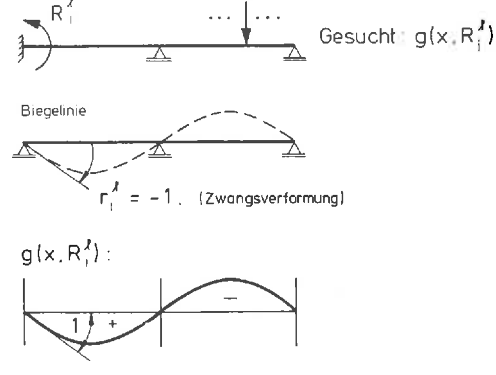


Bild 8.18 Ermittlung von Einflußlinien für Lagerreaktionen

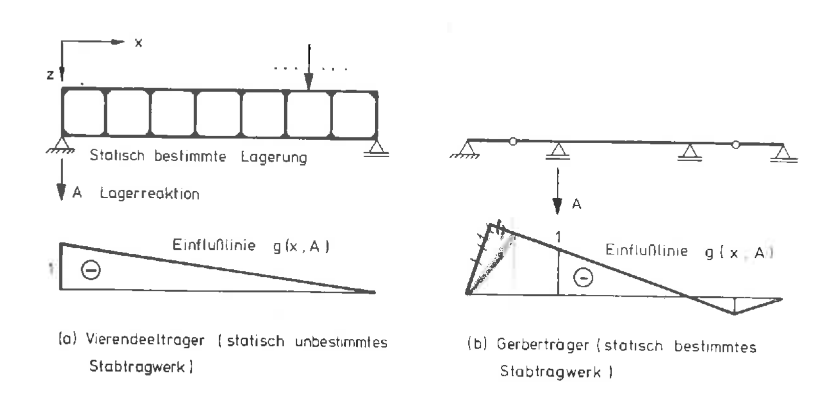
Die Berechnung des Tragwerkes unter Zwangsverformungen ist in Abschnitt 7.3 beschrieben. Das Ergebnis sind wieder Knoten- und Elementverformungen, mit denen die Verformung des Belastungsbereiches ermittelt werden kann (vgl. Abschnitt 8.2).

Einen Sonderfall stellen *äußerlich statisch bestimmte Tragwerke* dar (Bild 8.19). Durch eine Zwangsverformung ergibt sich eine kinematische Kette (Abschnitt 7.3). Daraus folgt:

Die Einflußlinie für eine Lagerreaktion eines statisch bestimmt gelagerten oder eines statisch bestimmten Tragwerkes ist bereichsweise eine lineare Funktion der Koordinaten des Belastungsbereiches.

Bei einem statisch bestimmt gelagerten Tragwerk kann des-

halb die Einflußlinie für eine Lagerreaktion aus den Koordinaten der Knotenpunkte des Belastungsbereiches berechnet werden.



(a) Vierendeelträger (statisch unbestimmtes Stabtragwerk)

(b) Gerberträger (statisch bestimmtes Stabtragwerk)

Bild 8.19 Einflußlinien für Lagerreaktionen
(a) bei statisch bestimmter Lagerung und
(b) bei statisch bestimmten Stabwerken

Die Berechnung der Einflußlinie für die Auflagerkraft eines statisch unbestimmten Stabwerkes wird im folgenden gezeigt.

Beispiel 8.7:
Die Einflußlinie für die Auflagerkraft A des in Bild 8.20 dargestellten Fachwerks ist für eine auf dem Obergurt wandernde Einheitslast zu berechnen. Die zu A korrespondierende Zwangsverformung ist $r_z \equiv r_{1z} = -1$.

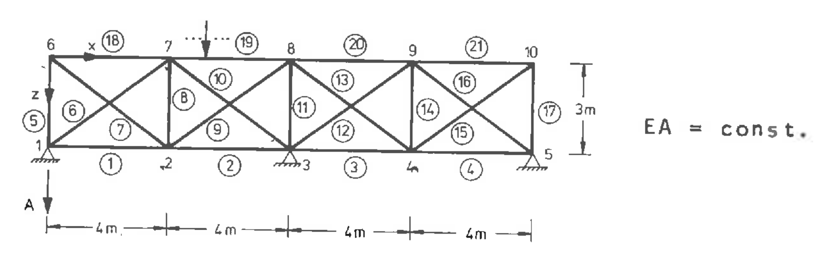


Bild 8.20 Ebenes Fachwerk

Mit der Koordinaten- und Verknüpfungstafel werden die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}_{11}$ und der Lastvektor $-\underline{K}_{12}\ \underline{r}_z$ aufgestellt.

Koordinatentafel

Knoten	x [m]	z
1	0	3
2	4	3
3	8	3
4	12	3
5	16	3
6	0	0
7	4	0
8	8	0
9	12	0
10	16	0

$\cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$
$\sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$

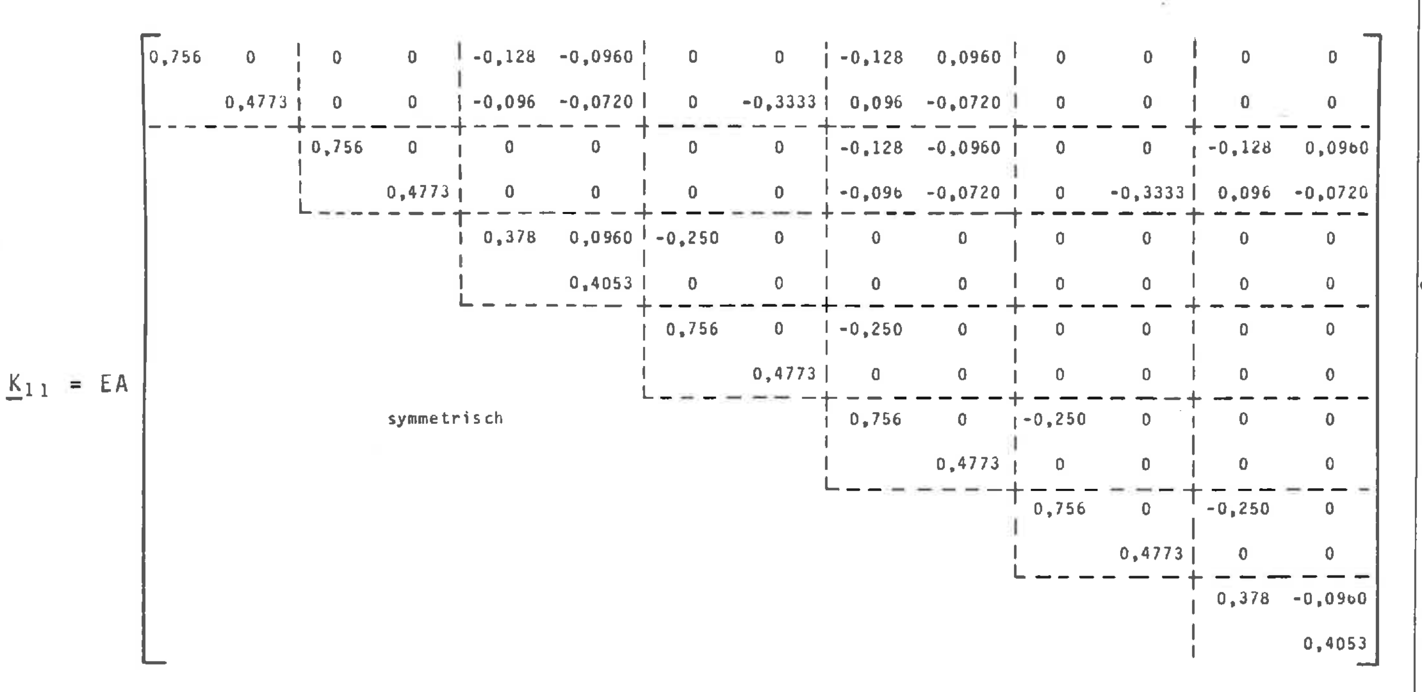
Verknüpfungstafel

Element	Knoten ℓ	Knoten r	ℓ_i [m]	cos α	sin α
①	1	2	4	1	0
②	2	3	4	1	0
③	3	4	4	1	0
④	4	5	4	1	0
⑤	1	6	3	0	-1
⑥	1	7	5	0,8	-0,6
⑦	2	6	5	-0,8	-0,6
⑧	2	7	3	0	-1
⑨	2	8	5	0,8	-0,6
⑩	3	7	5	-0,8	-0,6
⑪	3	8	3	0	-1
⑫	3	9	5	0,8	-0,6
⑬	4	8	5	-0,8	-0,6
⑭	4	9	3	0	-1
⑮	4	10	5	0,8	-0,6
⑯	5	9	5	-0,8	-0,6
⑰	5	10	3	0	-1
⑱	6	7	4	1	0
⑲	7	8	4	1	0
⑳	8	9	4	1	0
㉑	9	10	4	1	0

Nach dem in Abschnitt 7.3 beschriebenen Verfahren zur Berechnung von Stabwerken bei Zwangsverformungen wird der Lastvektor für eine negative Einheitsverformung des Knotens 1 in z-Richtung aufgestellt. Es ergibt sich:

$$\underline{K}_{12}\ \underline{r}_z = EA\,[0\ \ 0\,|\,0\ \ 0\,|\,0\ \ 0{,}3333\,|\,-0{,}096\ \ 0{,}072\,|\,0\ \ 0\,|\,0\ \ 0\,|\,0\ \ 0]^T .$$

Steifigkeitsmatrix:



$\underline{K}_{11} = EA$

0,756	0	0	0	-0,128	-0,0960	0	0	-0,128	0,0960	0	0	0	0
	0,4773	0	0	-0,096	-0,0720	0	-0,3333	0,096	-0,0720	0	0	0	0
		0,756	0	0	0	0	0	-0,128	-0,0960	0	0	-0,128	0,0960
			0,4773	0	0	0	0	-0,096	-0,0720	0	-0,3333	0,096	-0,0720
				0,378	0,0960	-0,250	0	0	0	0	0	0	0
					0,4053	0	0	0	0	0	0	0	0
						0,756	0	-0,250	0	0	0	0	0
							0,4773	0	0	0	0	0	0
								0,756	0	-0,250	0	0	0
									0,4773	0	0	0	0
										0,756	0	-0,250	0
											0,4773	0	0
												0,378	-0,0960
													0,4053

symmetrisch

Der Faktor EA kann gekürzt werden. Die Lösung des Gleichungssystems (7.28) $\underline{K}_{11}\ \underline{r} = -\underline{K}_{12}\ \underline{r}_z$ ($\underline{R} = \underline{0}$) ergibt für die Knotenverformungen

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} -0{,}0336 \\ -0{,}4602 \\ \hdashline 0{,}0336 \\ 0{,}0398 \\ \hdashline 0{,}3167 \\ -0{,}9871 \\ \hdashline 0{,}2937 \\ -0{,}4722 \\ \hdashline 0{,}1875 \\ -0{,}0499 \\ \hdashline 0{,}0813 \\ 0{,}0278 \\ \hdashline 0{,}0583 \\ 0{,}0129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{2_x} \\ r_{2_z} \\ \hdashline r_{4_x} \\ r_{4_z} \\ \hdashline r_{6_x} \\ r_{6_z} \\ \hdashline r_{7_x} \\ r_{7_z} \\ \hdashline r_{8_x} \\ r_{8_z} \\ \hdashline r_{9_x} \\ r_{9_z} \\ \hdashline r_{10_x} \\ r_{10_z} \end{bmatrix} \quad \text{Dimension [m]}$$

Die Einflußlinie für eine auf dem Obergurt wandernde Einheitslast ist die Verbindungslinie der vertikalen Verformungen der Knoten des Obergurtes. Die Einflußlinie ist in den Elementen linear. Sie ist in Bild 8.21 dargestellt.

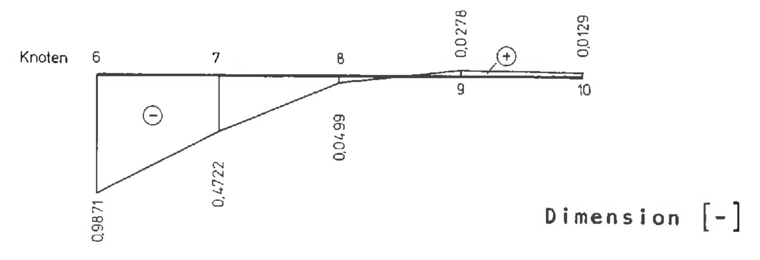
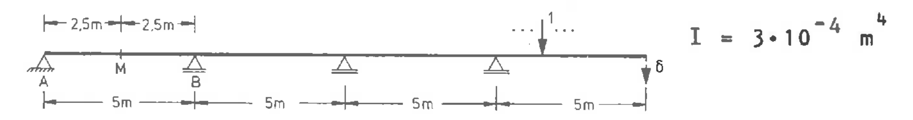


Bild 8.21 Einflußlinie der Auflagerkraft A für eine auf dem Obergurt wandernde Einheitslast

Aufgaben:

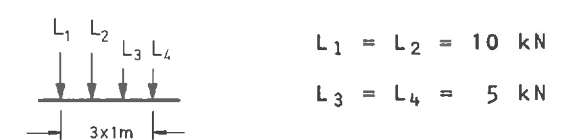
8.1 Berechnen Sie die Einflußlinien für eine wandernde Einheitskraft in einem Durchlaufträger, wie er im folgenden dargestellt ist:



$I = 3 \cdot 10^{-4}\ m^4$

(a) Für die Lagerkräfte in A und B,
(b) Für das Biegemoment in M,
(c) Für die Durchsenkung δ.
Die Einflußlinien sind darzustellen.

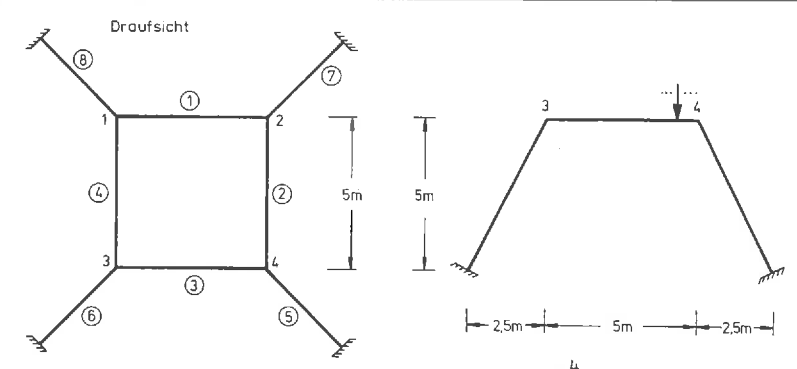
8.2 Die Einflußlinie nach Aufgabe 8.1 (c) ist für eine Lastgruppe L mit den Laststellungen L_1 in A und L_1 in B auszuwerten.
Lastgruppe L:



$L_1 = L_2 = 10$ kN

$L_3 = L_4 = 5$ kN

8.3 Die Einflußlinie für einen räumlichen Rahmen (siehe unten) infolge einer wandernden Einheitskraft im Bereich ①-②-③-④ ist zu berechnen für:
(a) die Stabendkräfte des Stabes ① im Knoten 1,
(b) die Einspannmomente im Stab ④,
(c) die Normalkraft im Stab ⑤.
Querschnittswerte: Nahtlose Flußstahlrohre nach DIN 1629
Außendurchmesser: 394 mm
Innendurchmesser: 374 mm
Die Einflußlinien sind in der Abwicklung ①-②-③-④ darzustellen. Die Knoten- und Elementnumerierung kann geändert werden.



8.4 Die Einflußlinie für das Moment $\bar{S}_6^4$, Beispiel 8.6, ist für eine 1 m lange konstante Streckenlast von 10 kN/m, die sich von Knoten 5 aus über den Belastungsbereich (2), (4), (6), bewegt auszuwerten.

Wie groß ist das maximale Moment $\max(\bar{S}_6^4)$?

9 Das Kraftgrößenverfahren

Wir nehmen an, daß das Kraftgrößenverfahren in seinen Grundzügen bekannt ist (/28/, /74/, /79/). Die wesentlichen Schritte der Berechnung sind im folgenden zusammengefaßt:

(1) Anwendung des Schnittprinzips zur Festlegung ρ statisch unbestimmter, innerer Kraftgrößen und eines statisch bestimmten Hauptsystems.

(2) Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen in dem statisch bestimmten Hauptsystem infolge der äußeren Belastung.
In Richtung der statisch Unbestimmten treten Relativverformungen (δ_{i0}) auf.

(3) Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen in dem statisch bestimmten Hauptsystem infolge von Einheitsbelastungen (statisch Unbestimmte). In Richtung der statisch Unbestimmten treten Relativverformungen (δ_{ik}) auf.

(4) Berechnung der statisch Unbestimmten (X_k) aus der Verträglichkeitsbedingung: Die Summe der Relativverformungen infolge der statisch Unbestimmten und der Relativverformung infolge der äußeren Belastung muß Null sein, d.h.

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{i\rho}X_\rho + \delta_{i0} = 0$$

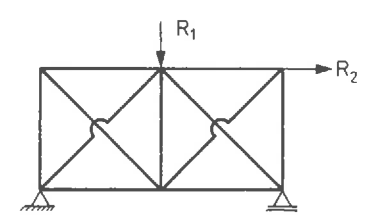
für alle Relativverformungen ($i = 1, \ldots, \rho$).

(5) Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen aufgrund des Superpositionsprinzips.

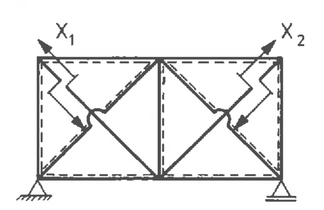
Eine skizzenhafte Darstellung der einzelnen Schritte gibt Bild 9.1.

Aus dieser zusammenfassenden Darstellung erkennt man die Hauptmerkmale des Kraftgrößenverfahrens:

- die Berechnung erfolgt über die inneren Kraftgrößen,
- die Berechnung erfordert die Festlegung eines statisch bestimmten Hauptsystems.

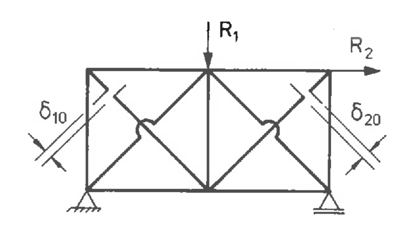


(a) Zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk mit äußerer Belastung

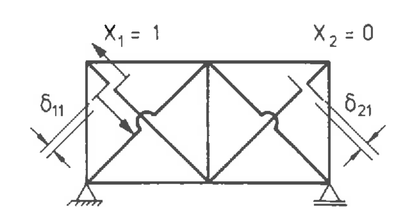


(b) *Schritt 1:* Festlegung der statisch Unbestimmten X_k und des statisch bestimmten Hauptsystems ---

Berechnung der Schnittgrößen und Verformungen:



(c) *Schritt 2:* Relativverformungen im Hauptsystem infolge der Lasten → δ_{10}, δ_{20}



(d) *Schritt 3:* Relativverformungen im Hauptsystem infolge der statisch Unbestimmten; hier:
$X_1 = 1,\ X_2 = 0 \rightarrow \delta_{11},\ \delta_{21}$
$(X_1 = 0,\ X_2 = 1 \rightarrow \delta_{22},\ \delta_{12})$

Schritt 4: Verträglichkeitsbedingung

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

Schritt 5: Schnittgrößen und Verformungen durch Superposition der entsprechenden Größen infolge der äußeren Belastung ($\underline{R} \neq \underline{0}$, $\underline{X} = \underline{0}$) und der statisch Unbestimmten ($\underline{R} = \underline{0}$, $\underline{X} \neq \underline{0}$).

Bild 9.1 Einzelschritte des Kraftgrößenverfahrens

Im folgenden wird das Kraftgrößenverfahren in Matrizenschreibweise dargestellt. Die Darstellung erfolgt in Anlehnung an die obige Zusammenfassung zunächst auf der Grundlage einer Festlegung der statisch Unbestimmten nach statischen Gesichtspunkten; in Erweiterung wird dann ein Verfahren zur automatischen Wahl der statisch Unbestimmten angegeben.

Wir behandeln hier keine Varianten des Kraftgrößenverfahrens, z.B. die "Berechnung mit statisch unbestimmten Hauptsystemen" oder die Verfahren der "Gruppenlasten" und des "elastischen Schwerpunktes". Dies ist begründet durch die relativ geringe Bedeutung des Kraftgrößenverfahrens im Vergleich mit dem Weggrößenverfahren: Mit Ausnahme von Sonderfällen und speziellen Problemstellungen (/82/, /83/, /84/, /42/) wird heute fast ausschließlich das Weggrößenverfahren angewendet.

9.1 Das Schnittprinzip, Last- und Eigenspannungszustände

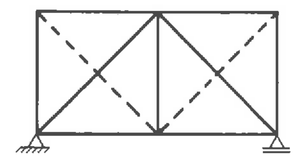
Die Festlegung der statisch Unbestimmten nach *statischen Gesichtspunkten* kann wie folgt beschrieben werden:

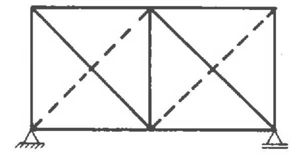
"Die statisch Unbestimmten sind so zu wählen, daß ein unverschiebliches Hauptsystem entsteht".

In einfach überschaubaren, ebenen Stabwerken bereitet dies keine Schwierigkeit. Für das zweifach statisch unbestimmte Fachwerk (Bild 9.1) sind einige zulässige und unzulässige Hauptsysteme in Bild 9.2 dargestellt.

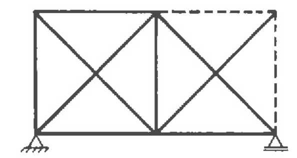
Die Wahl der statisch Unbestimmten ist bei einem Fachwerk gleichbedeutend mit dem "Schneiden" von Stäben. Bei biegesteifen Stabwerken werden durch die Wahl der statisch Unbestimmten *Gelenke* eingeführt, die eine Verdrehung oder Verschiebung der angrenzenden Stäbe ermöglichen. Dies entspricht dem Nullsetzen linear unabhängiger Stabendkräfte in einzelnen Elementen (vgl. Kapitel 4). Die Anzahl der linear unabhängigen Stabendkräfte (F_i), die zu Null gesetzt werden

(a) zulässige Hauptsysteme:





(b) unzulässige Hauptsysteme



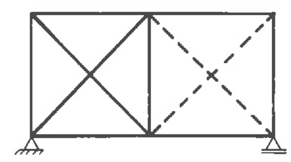


Bild 9.2 Zulässige und unzulässige Hauptsysteme

müssen, ist gleich der Redundanz des Stabwerkes.
Wir fassen dies zusammen in

Definition 9.1: *Ein zulässiges Hauptsystem eines ρ-fach statisch unbestimmten Stabwerkes ist jedes unverschiebliche, statisch bestimmte Stabwerk, das man aus dem ursprünglichen Stabwerk durch Nullsetzen von ρ Komponenten des Vektors der linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$ erhält.*

Nach diesen allgemeinen Erläuterungen gehen wir nun zu einer Darstellung in Matrizenschreibweise über.
Ausgangspunkt ist die Gleichgewichtsbedingung des Stabwerkes (4.18):

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} .$$

Die Gleichgewichtsmatrix besitzt bei einem Stabwerk mit n Freiheitsgraden der Verformung genau n linear unabhängige Zeilen. Jeder Spalte von $\underline{a}^T$ ist eine Stabendkraft F_k, $k = 1, \ldots, m$ zugeordnet. Die statischen Transformationsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$, aus welchen die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ erzeugt wird, besitzen linear unabhängige Spalten.
Auf dieser Grundlage läßt sich zeigen, daß der folgende Satz gilt (/95/, Seite 98, siehe auch Anhang A2).

Satz 9.1: *Die Gleichgewichtsbedingungen* $\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R}$ *mit* $\underline{a}^T_{n \times m}$, $\rho = m - n > 0$ *besitzt Lösungen der Form*

$$\underline{F} = \underline{B}_o \underline{R} + \underline{B}_x \underline{X} \tag{9.1}$$

mit

$$\underline{a}^T \underline{B}_o = \underline{I}_n , \quad \underline{B}_{o[m \times n]} \text{ mit Rang } n , \tag{9.2}$$

$$\underline{a}^T \underline{B}_x = \underline{0} , \quad \underline{B}_{x[m \times \rho]} \text{ mit Rang } \rho , \tag{9.3}$$

und

$$\underline{X}_{\rho \times 1} .$$

$\underline{I}_n$ ist die Einheitsmatrix der Ordnung $[n \times n]$, (siehe Anhang A1).

Durch $\rho > 0$ werden statisch bestimmte Tragwerke ausgeschlossen; Die Berechnung statisch bestimmter Stabwerke ist in Kapitel 4 und 5 dargestellt.

Wir bezeichnen

$\underline{B}_o$ als die Matrix der *Lastspannungszustände* und

$\underline{B}_x$ als die Matrix der *Eigenspannungszustände*.

Diese Bezeichnungsweise ist aus der Bezeichnung der inneren Kraftgrößen als "verallgemeinerte Spannungen" abgeleitet. Die Elemente der Matrix $\underline{B}_o$ sind die Komponenten von $\underline{F}$ infolge einer Einheitsbelastung in Richtung der einzelnen Knotenverformungen. Die Spalten von $\underline{B}_x$ sind Vektoren *linear unabhängiger Stabendkräfte*, die nicht durch äußere Belastung verursacht werden (Eigenspannungen). Die Komponenten von $\underline{X}$ sind die statisch Unbestimmten.

Die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ können auf einfache Weise aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, wenn ein zulässiges Hauptsystem bekannt ist. Mit einem Hauptsystem sind auch die Nullkomponenten von $\underline{F}$ festgelegt. Wir fassen die Indizes dieser Nullkomponeneten in der *Indexmenge* I mit ρ Elementen zusammen.

Damit stellt sich das Hauptsystem wie folgt dar:

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R}$$

mit $F_i = 0$ für alle $i \in I$. (9.4)

Durch die ρ Nebenbedingungen $F_i = 0$ ergibt sich eine erweiterte Gleichgewichtsbedingung

$$\underline{\tilde{a}}^T \underline{F} = \underline{\tilde{R}}$$

mit $\underline{\tilde{a}}^T_{m \times m}$ und $\underline{\tilde{R}}_{m \times 1}$. (9.5)

Die erweiterte Gleichgewichtsmatrix $\underline{\tilde{a}}^T$ und der erweiterte Lastvektor $\underline{\tilde{R}}$ sind wie folgt besetzt:

$$\underline{\tilde{a}}^T = \begin{bmatrix} \underline{a}^T \\ \underline{\hat{I}} \end{bmatrix} , \qquad \underline{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{bmatrix} . \qquad (9.6)$$

$\underline{\hat{I}}$ ist eine (0,1)-Matrix mit ρ Zeilen und m Spalten, d.h. $\underline{\hat{I}}$ ist zeilenweise aus Einheitsvektoren aufgebaut.
Damit ist die Wahl des zulässigen Hauptsystems nach statischen Gesichtspunkten in Matrizenform ausgedrückt, und die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ können berechnet werden.

Nach Definition 9.1 beschreibt (9.5) bei richtiger Wahl der statisch Unbestimmten ein zulässiges Hauptsystem. Daraus folgt:
Die erweiterte Gleichgewichtsmatrix $\underline{\tilde{a}}^T$ ist nichtsingulär und es gilt

Satz 9.2: *Die Matrizen der Last- und Eigenspannungszustände sind Teilmatrizen der Inversen der erweiterten Gleichgewichtsmatrix:*

$$(\underline{\tilde{a}}^T)^{-1} = \left[\underline{B}_o \quad \underline{B}_x \right] . \qquad (9.7)$$

Die ersten n Spalten der Inversen sind mit der Matrix $\underline{B}_o$, die folgenden $\rho = m - n$ Spalten mit der Matrix $\underline{B}_x$ identisch.

Man erkennt dies aufgrund der folgenden Überlegung:
Die Spalten von $\underline{\tilde{a}}^T$ können so vertauscht werden, daß sich die folgende Matrix ergibt:

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} \underline{a}_o^T & \underline{a}_x^T \\ \underline{0} & \underline{I}_\rho \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

Wir berechnen nun die Inverse von $\underline{A}^T$ aus:

$$\underline{I}_m = \begin{bmatrix} \underline{a}_o^T & \underline{a}_x^T \\ \underline{0} & \underline{I}_\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Im einzelnen ergibt sich

$$\underline{I}_n = \underline{a}_o^T \underline{B}_{11} + \underline{a}_x^T \underline{B}_{21} \tag{9.9}$$

$$\underline{0} = \underline{a}_o^T \underline{B}_{12} + \underline{a}_x^T \underline{B}_{22} \tag{9.10}$$

$$\underline{0} = \underline{B}_{21}$$

$$\underline{I}_\rho = \underline{B}_{22} .$$

Daraus berechnet man

$$\underline{B}_{11} = (\underline{a}_o^T)^{-1} ,$$

$$\underline{B}_{12} = -(\underline{a}_o^T)^{-1} \underline{a}_x^T$$

und $$(\underline{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} (\underline{a}_o^T)^{-1} & -(\underline{a}_o^T)^{-1} \underline{a}_x^T \\ \underline{0} & \underline{I}_\rho \end{bmatrix} \tag{9.11}$$

Aufgrund von (9.9) und (9.10) gilt:

$$\underline{A}^T \underline{B}'_o = \begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{B}'_o = \begin{bmatrix} (\underline{a}_o^T)^{-1} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T \underline{B}'_x = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I}_\rho \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{B}'_x = \begin{bmatrix} -(\underline{a}_o^T)^{-1} \underline{a}_x^T \\ \underline{I}_\rho \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\underline{A}^T$ wurde aus $\underline{\bar{a}}^T$ durch Spaltentausch erzeugt; durch den korrespondierenden Zeilentausch in $\underline{B}_o'$ und $\underline{B}_x'$ erhält man $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$, den Lastspannungs- und Eigenspannungszustand bezüglich $\underline{\tilde{a}}^T$. Damit ist (9.7) bestätigt.
Die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ sind von wesentlicher Bedeutung für das Kraftgrößenverfahren. Die Berechnung auf der Grundlage des Schnittprinzips wird deshalb ausführlich an einem Beispiel dargestellt.

Beispiel 9.1:
Zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk (Bild 9.3).
Für das Fachwerk sind die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ zu berechnen und zwar für drei verschiedene, frei wählbare Hauptsysteme. Die gewählten Hauptsysteme I, II und III sind in Bild 9.3 angegeben.

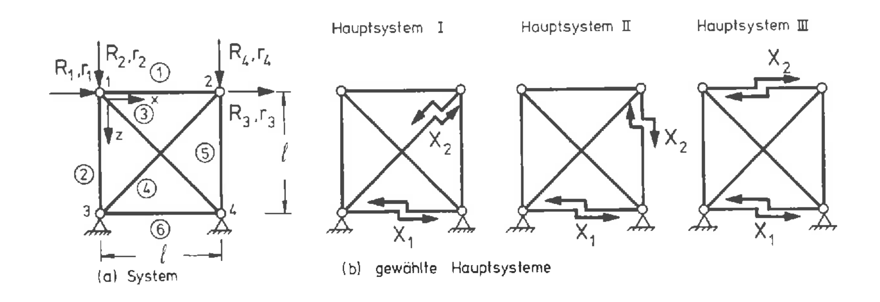


Bild 9.3 Ebenes Fachwerk mit zulässigen Hauptsystemen

Die Wahl der statisch Unbestimmten ist in Bild 9.3 (b) dargestellt:

Jedes der Hauptsysteme ist zulässig, und es gibt - abgesehen von Spiegelungen um die Symmetrieachse - keine anderen zulässigen Hauptsysteme. Die Wahl erfolgt nach statischen Gesichtspunkten, d.h. anhand der Skizze wird ein unverschiebliches, statisch bestimmtes Hauptsystem festgelegt.

Für die Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ müssen die Gleichgewichts-

bedingungen aufgestellt werden. Hierzu sind zunächst die Freiheitsgrade der Verschiebung zu kennzeichnen. Es sind insgesamt vier Freiheitsgrade vorhanden (r_1, ..., r_4), (Bild 9.3 (a)).

Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung erfolgt nach dem in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren. Man erhält mit $c = \sqrt{2}/2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die i-te Zeile der Matrizengleichung ist die Gleichgewichtsbedingung in der i-ten Verschiebungsrichtung r_i.
Die erweiterten Gleichgewichtsmatrizen $\tilde{\underline{a}}^T$ erhält man durch Ergänzung der Nebenbedingungen in dem gewählten Hauptsystem.

Hauptsystem I (Bild 9.3 (b))

Als statisch Unbestimmte werden gewählt:

$$X_1 \equiv F_6 = 0 \;, \quad X_2 \equiv F_4 = 0 \;.$$

Diese Gleichungen bilden die 5. und die 6. Zeile der erweiterten Gleichgewichtsmatrix $\tilde{\underline{a}}^T$:

$$\tilde{\underline{a}}^T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} , \quad (\tilde{\underline{a}}^T)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -c \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \qquad \underline{B}_o \qquad\qquad\qquad \underline{B}_x \end{array}$$

Die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ sind als Teilmatrizen der Inversen gekennzeichnet.

Hauptsystem II (Bild 9.3 (b))

Als statisch Unbestimmte werden gewählt:

$$X_1 \equiv F_6 = 0 \ , \quad X_2 \equiv F_5 = 0 \ .$$

Diese Gleichungen bilden die 5. und die 6. Zeile der erweiterten Gleichgewichtsmatrix $\underline{\tilde{a}}^T$:

$$\underline{\tilde{a}}^T = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -c & -1 & 0 \\ \hdashline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} , \quad (\underline{\tilde{a}}^T)^{-1} = \begin{array}{|cccc:cc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\underline{B}_o} & \multicolumn{2}{c}{\underline{B}_x} \end{array}$$

Die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ sind als Teilmatrizen der Inversen gekennzeichnet.

Hauptsystem III (Bild 9.3 (b))

Als statisch Unbestimmte werden gewählt:

$$X_1 \equiv F_6 = 0 \ , \quad X_2 \equiv F_1 = 0 \ .$$

Diese Gleichungen bilden die 5. und die 6. Zeile der erweiterten Gleichgewichtsmatrix $\underline{\tilde{a}}^T$:

$$\underline{\tilde{a}}^T = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -c & -1 & 0 \\ \hdashline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} , \quad (\underline{\tilde{a}}^T)^{-1} = \begin{array}{|cccc:cc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\underline{B}_o} & \multicolumn{2}{c}{\underline{B}_x} \end{array}$$

$\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ werden als Matrizen der Last- und Eigenspannungszustände bezeichnet. Wir deuten die belasteten Stäbe anhand der Lösung $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ des Hauptsystems I durch die größere Strichstärke und die Punktierung in Bild 9.4 an.

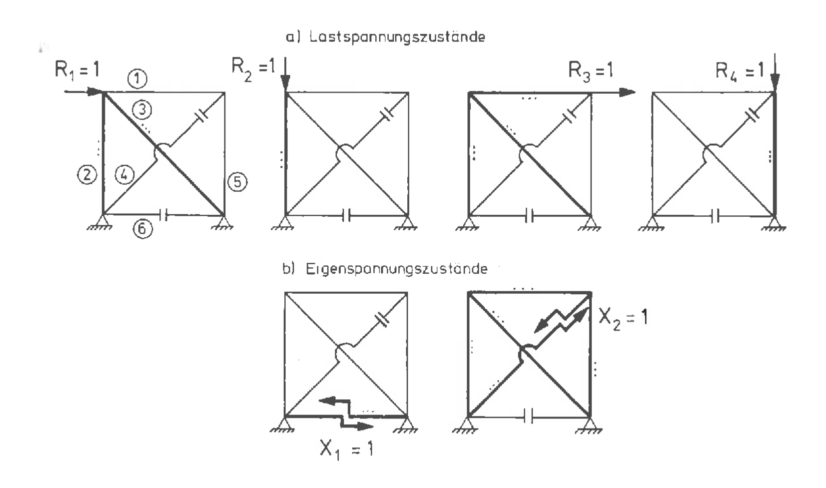


Bild 9.4 Last- und Eigenspannungszustände eines ebenen Fachwerkes

Mit der Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ sind alle *statisch zulässigen* Stabendkräfte bekannt. Dies läßt sich mit (9.1) zeigen: Jede Spalte von $\underline{B}_o$ ist einer Lastkomponente von $\underline{R}$ zugeordnet. Damit ist die i-te Spalte von $\underline{B}_o$ der Vektor der linear unabhängigen Stabendkräfte, den man für eine Einheitsbelastung $R_i = 1$ erhält.

Die Spalten der Matrix $\underline{B}_x$ sind linear unabhängige Stabendkräfte, die mit sich selbst im Gleichgewicht stehen. Als Vektoren betrachtet, stehen sie senkrecht auf den Zeilenvektoren, welche die Gleichgewichtsmatrix bilden.

Aus den obigen Betrachtungen erkennt man, daß die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ nicht eindeutig bestimmt sind. Jedes zulässige Hauptsystem ergibt andere Last- und Eigenspannungszustände (vgl. mit Bild 9.4).

Wir werden an späterer Stelle auf das Problem der systematischen Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ zurückkommen. Für die weitere Darstellung des Kraftgrößenverfahrens betrachten wir $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ zunächst als bekannt.

9.2 Verträglichkeitsbedingung und Verformungsberechnung

Das Hauptsystem, dessen Schnittgrößen wir mit $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ *vollständig, aber nicht eindeutig* berechnen können, verformt sich unter der äußeren Belastung. Es entstehen Knotenverformungen und Relativverformungen der Schnittufer. Diese Relativverformungen sind mit dem Verformungszustand des ursprünglichen Tragwerks unverträglich. Durch Formulierung von Verträglichkeitsbedingungen in den Schnittstellen erhält man zusätzliche Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Festlegung der Schnittgrößen. Im folgenden zeigen wir einen Weg zur Ableitung der Verträglichkeitsbedingung.

Ausgangsgleichung ist (9.1) als vollständige Lösungsmanigfaltigkeit der Gleichgewichtsbedingungen für virtuelle Kräfte (^):

$$\underline{\hat{F}} = \underline{B}_o\,\underline{\hat{R}} + \underline{B}_x\,\underline{\hat{X}}\,. \qquad (9.12)$$

Für das Verständnis der folgenden Darstellung ist es wichtig, daß $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ nur die Bedingungsgleichungen (9.2) und (9.3) erfüllen müssen: Die Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ kann auf irgendeinem Wege erfolgen und muß nicht mit der Vorstellung eines zulässigen Hauptsystems in Verbindung gebracht werden. Wichtig ist weiterhin, daß $\underline{B}_x$ vollen Spaltenrang besitzt, d.h. daß die Spalten *linear unabhängig* sind (Rang ρ).
Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (vgl. Abschn. 5.2)

$$\underline{\hat{F}}^T\,\underline{v} = \underline{\hat{R}}^T\,\underline{r}$$

erhält man durch Einsetzen von (9.12):

$$(\underline{\hat{X}}^T\,\underline{B}_x^T + \underline{\hat{R}}^T\,\underline{B}_o^T)\,\underline{v} = \underline{\hat{R}}^T\,\underline{r}\,. \qquad (9.13)$$

Das Skalarprodukt

$$\hat{\underline{X}}^T \, \underline{B}_x^T \, \underline{v}$$

ist die Arbeit, die durch Kraftgrößen $\hat{\underline{X}}$ und korrespondierende Weggrößen $\underline{B}_x^T \, \underline{v} = \underline{\delta}$ geleistet wird.
Die Komponenten $\hat{X}_i$ sind nach dem Gegenwirkungsprinzip (Abschnitt 4.1) *gegengleich wirkende*, betragsmäßig gleich große Kraftgrößen in den Schnitten. Folglich sind die korrespondierenden Weggrößen *Relativverformungen*. Damit kann die Verträglichkeitsbedingung formuliert werden:

Satz 9.3: *Die Relativverformung der Schnittufer in einem jeden zulässigen Hauptsystem mit kinematisch zulässigen Verformungen sind Null:*

$$\underline{\delta} \equiv \underline{B}_x^T \, \underline{v} = \underline{0} \, . \tag{9.14}$$

Eine gleichwertige Aussage ist:
Die Arbeit der Eigenspannungszustände auf kinematisch zulässigen Verformungen ist Null:

$$\hat{\underline{X}}^T \, \underline{B}_x^T \, \underline{v} = 0 \, . \tag{9.15}$$

Dies kann auf einfache Weise mit der kinematischen Verträglichkeitsbedingung (5.12)

$$\underline{a} \, \underline{r} = \underline{v}$$

bestätigt werden. Durch Einsetzen in (9.14) erhält man:

$$\underline{B}_x^T \, \underline{a} \, \underline{r} = \underline{\delta} \, ,$$

$$\text{wegen} \quad \underline{B}_x^T \, \underline{a} = \left(\underline{a}^T \, \underline{B}_x\right)^T \equiv \underline{0}$$

(vgl. (9.3)) ergibt sich

$$\underline{\delta} = \underline{0} \, .$$

Die Bestimmungsgleichung für die Unbekannten $\underline{X}$ erhält man durch Berücksichtigung der Werkstoffeigenschaften. Für die elastischen Verformungen $\underline{v}$ gilt (5.17):

$$\underline{v} = \underline{f} \, \underline{F} \, .$$

Durch Einsetzen in (9.14) folgt mit $\underline{F} = \underline{B}_0\ \underline{R} + \underline{B}_x\ \underline{X}$ die *Bestimmungsgleichung für die statisch Unbestimmten:*

$$(\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_x)\ \underline{X} = -\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_0\ \underline{R}\ . \tag{9.16}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Spalten von $\underline{B}_x$ und der Invertierbarkeit von $\underline{f}$ kann $\underline{X}$ eindeutig berechnet werden: Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (9.16) ist positiv definit. Nach (9.1) ergeben sich damit die Stabendkräfte im statisch unbestimmten System.

Die *Knotenverformungen* erhält man aus $\underline{v} = \underline{f}\ \underline{F}$, (5.12) und (9.2) zu:

$$\underline{r} = \underline{B}_0^T\ \underline{f}\ \underline{F}\ . \tag{9.17}$$

Damit ist die Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren auf der Grundlage des Schnittprinzips vollständig beschrieben.

Durch eine nähere Betrachtung der Ableitung von (9.16) und (9.17) ergeben sich interessante Folgerungen:

Jede Spalte von $\underline{B}_0$ kennzeichnet einen Lastspannungszustand an einem völlig beliebigen Hauptsystem. Das Hauptsystem zur Berechnung der Knotenverformungen muß also nicht mit dem Hauptsystem übereinstimmen, das für die Berechnung der statisch Unbestimmten (9.16) gewählt wurde.

Die Knotenverformungen r_i werden nach (9.17) aus dem Skalarprodukt von

$\hat{\underline{v}}_i$, dem i-ten virtuellen Verformungszustand im Hauptsystem

und $\underline{F}$, den Stabendkräften im statisch unbestimmten System berechnet:

$$r_i = (\hat{\underline{v}}_i)^T\ \underline{F}\ .$$

Aufgrund der Vertauschbarkeit des Skalarproduktes läßt sich zeigen, daß Verformungs- und Lastzustand vertauscht werden können:

$$r_i = \hat{\underline{F}}_i^T\ \underline{v}\ ;$$

die Verformung r_i kann also auch aus den virtuellen Stabendkräften $\hat{\underline{F}}_i$ und den Stabendverformungen $\underline{v}$ im statisch unbestimmten System berechnet werden.
Diese Folgerungen fassen wir zusammen in

Satz 9.4 *(Reduktionssatz): Bei der Verformungsberechnung statisch unbestimmter Tragwerke braucht nur einer der Zustandsvektoren $\underline{F}$ und $\underline{v}$ am statisch unbestimmten Tragwerk berechnet werden. Der andere kann an einem beliebigen zulässigen Hauptsystem berechnet werden.*

Dieser Satz wird üblicherweise für die den Zustandsvektoren entsprechenden Zustandslinien angegeben (/28/, Seite 297). Satz 9.4 ist also eigentlich eine spezielle Form des Reduktionssatzes für diskrete Tragwerke. Für die systematische Berechnung besitzt der Reduktionssatz eine relativ geringe Bedeutung.
Bei der Anwendung des Kraftgrößenverfahrens in der üblichen Form bereitet die Berechnung von *Formänderungsintegralen* einen erheblichen Rechenaufwand.

Die Formänderungsintegrale (δ_{ik}-Zahlen) sind Integrale über Produktfunktionen von Zustandslinien. Sie ergeben die i-ten Verformungen infolge einer virtuellen Last $\hat{R}_k = 1$. Die i-te Verformung infolge der äußeren Belastung wird mit δ_{i0} bezeichnet.
δ_{ik}-Zahlen sind Relativverformungen im Hauptsystem.

Die Formänderungsintegrale treten in der vorliegenden Darstellung nur implizit auf: Die Integration wird auf Elementebene (vgl. (5.8)) für die Ableitung der Flexibilitätsmatrizen durchgeführt. Die Relativverformungen sind:

$$\begin{aligned} \underline{\delta} &\equiv \left[\delta_{ik}\right] = \underline{B}_x^T \, \underline{f} \, \underline{B}_x \, , \\ \underline{\delta}_0 &\equiv \left[\delta_{i0}\right] = \underline{B}_x^T \, \underline{f} \, \underline{B}_0 \, \underline{R} \, . \end{aligned} \qquad (9.18)$$

Diese Zusammenhänge sollen nur die Verbindung zu der be-

kannten Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren andeuten. Wir werden sie im folgenden nicht weiter vertiefen.

9.3 Automatische Wahl der statisch Unbestimmten

Die Wahl der statisch Unbestimmten ist die größte Schwierigkeit des Kraftgrößenverfahrens. Bei überschaubaren Systemen kann die Festlegung der statisch Unbestimmten anhand einer Systemskizze erfolgen. Hiervon sind wir in den vorangehenden Abschnitten ausgegangen.

Bei größeren Systemen ist eine solche Vorgehensweise nicht möglich: Die zeichnerische Darstellung ist zu umständlich und es bereitet Probleme, ein statisch bestimmtes Hauptsystem festzulegen. Bei einer systematischen Berechnung muß deshalb für die Wahl der statisch Unbestimmten ein Verfahren bereitgestellt werden, das von der digitalen Darstellung des Systems ausgeht.
Im folgenden wird ein solches Verfahren angegeben. Zusammen mit der Wahl der statisch Unbestimmten werden hierbei zugleich das Hauptsystem ($\underline{B}_o$) und die Eigenspannungszustände ($\underline{B}_x$) berechnet.
Die Ausgangsgleichung ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} ,$$

$$\underline{a}^T_{n \times m} \quad \text{mit} \quad \rho = m - n > 0 .$$

Wir erinnern an einige wesentliche Eigenschaften von $\underline{a}^T$, die aus der mechanischen Problemstellung bekannt sind:

- $\underline{a}^T$ besitzt linear unabhängige Zeilen und hat damit vollen Zeilenrang (Rang n),
- es gibt Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ derart, daß

$$\underline{a}^T \underline{B}_o = \underline{I}_n \quad \text{und}$$

$$\underline{a}^T \underline{B}_x = \underline{0}_{n \times \rho} .$$

Die Spalten $\underline{B}_{xi}$ von $\underline{B}_x$ sind linear unabhängig.

Lineare Gleichungssysteme der Form

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} \qquad (9.19)$$

mit einer rechteckigen Koeffizientenmatrix $\underline{a}^T_{n\times m}$ $(m > n)$ bezeichnet man als unterbestimmte Gleichungssysteme +). Diese Gleichungssysteme besitzen keine eindeutige Lösung.
Wir zeigen dies an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 9.2:

$$2F_1 + F_2 + F_3 = 1$$

$$2F_2 + F_3 = 0 \ .$$

Die Differenz beider Gleichungen ergibt

$$-2F_1 + F_2 = -1 \ , \quad F_2 = 2F_1 - 1 \ .$$

Durch Einsetzen in die zweite Gleichung folgt

$$F_3 = -2(2F_1 - 1) \ .$$

Damit kann die Lösung in parametrischer Form, mit F_1 als Parameter, dargestellt werden:

$$F_1 \equiv F_1$$

$$F_2 = 2F_1 - 1$$

$$F_3 = -4F_1 + 2 \ .$$

+) Im Gegensatz zu überbestimmten Gleichungssystemen mit $m < n$, wie sie z.B. in der Ausgleichsrechnung auftreten.

In Matrizenschreibweise stellt sich diese Lösung wie folgt dar:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} X_1 \quad \text{für alle } X_1 \equiv F_1 \,. \qquad (9.20)$$

Damit haben wir ein unterbestimmtes Gleichungssystem gelöst. Die Lösung ist nicht eindeutig, wir hätten z.B. auch F_3 als Parameter wählen können mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} X_1 \quad \text{für alle } X_1 \equiv F_3 \,. \qquad (9.21)$$

Beide Lösungen besitzen die geforderten Eigenschaften, wie man leicht durch Einsetzen bestätigt.

Damit wurde für ein Gleichungssystem mit den Eigenschaften der Gleichgewichtsbedingungen eine Lösung $\underline{B}_o\ \underline{R}$ und $\underline{B}_x$ berechnet und zwar ohne Bezug zu einer skizzenhaften Darstellung.

Die Lösung wurde mit dem Gauß'schen Algorithmus gefunden. Im Anhang A2.1.6 wird dieses Verfahren ausführlich beschrieben. Die einzelnen Schritte zur Bestimmung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$, werden im folgenden zusammengefaßt dargestellt:

Die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ wird zunächst um $\rho = m - n$ Nullzeilen ergänzt. Diese erweiterte Matrix wird mit dem Gauß'schen Algorithmus in eine *obere Dreiecksmatrix* $\underline{U}$ und eine *untere Dreiecksmatrix* $\underline{L}$ zerlegt.

Vor der Zerlegung einer jeden Spalte und Zeile muß eine Spaltenpivotsuche durchgeführt werden; man sucht das betragsgrößte Element in der Spalte.

Ist das betragsgrößte Element größer als eine Fehlerschranke ε, so vertauscht man die Zeilen so, daß das Hauptdiagonalelement das betragsgrößte Element in der Spalte ist.

Ist das betragsgrößte Element kleiner als die Fehlerschranke ε, so hat man eine linear abhängige Spalte gefunden und die zugehörige Stabendkraft wird als statisch Unbestimmte gewählt.

Die Wahl einer statisch Unbestimmten erfolgt durch Ersetzen einer Nullzeile durch eine Einheitszeile (der Spaltennummer entsprechende Zeile der Einheitsmatrix $\underline{I}_m$).

Im Verlauf der Zerlegung werden die ρ Nullzeilen durch Einheitszeilen ersetzt. Damit werden genau ρ statisch Unbestimmte gewählt.

Die Zeilenvertauschung merkt man sich zunächst in einem *Vertauschungsvektor*. Aus diesem Vertauschungsvektor bildet man die *Permutationsmatrix* $\underline{V}$ (Anhang A1), die hier aus formalen Gründen eingeführt wird.

Die Einheitszeilen, um die $\underline{a}^T$ erweitert wird, werden in einer Matrix $\hat{\underline{I}}_{\rho \times m}$ zusammengefaßt.

Die Zerlegung ergibt:

$$\hat{\underline{a}}^T \equiv \underline{L}\ \underline{U} = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{a}^T \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \qquad (9.22)$$

Durch Multiplikation von rechts mit $\underline{B}_x$ bzw. $\underline{B}_o$ ergibt sich:

$$\underline{U}\ \underline{B}_x = \hat{\underline{I}}^T \qquad (9.23)$$

$$\underline{L}\ \underline{U}\ \underline{B}_o = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (9.24)$$

Mit den rechten Seiten von (9.23) und (9.24) werden $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ durch wiederholtes Vorwärts-Rückwärtseinsetzen berechnet.

Eine Vereinfachung ergibt sich für den Fall, daß nicht $\underline{B}_o$ sondern $\underline{B}_o\ \underline{R}$ für wenige Lastfälle berechnet werden muß. In diesem Fall wird (9.24) zu:

$$\underline{L}\ \underline{U}\ \underline{B}_o\ \underline{R} = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (9.25)$$

Für die üblichen in der Praxis auftretenden Problemstellungen erhält man mit diesem Verfahren stabile Lösungen. Nur bei *schwach linear abhängigen Zeilen* der Gleichgewichtsmatrix können sich Fehler ergeben. Dies ist aber ein Zeichen dafür, daß im Tragwerk mit kleinen Änderungen der inneren Kräfte relativ große Verformungen möglich sind (Bild 9.5). Solche Tragwerke kommen einer kinematischen Kette nahe und können nicht mit den Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System berechnet werden.

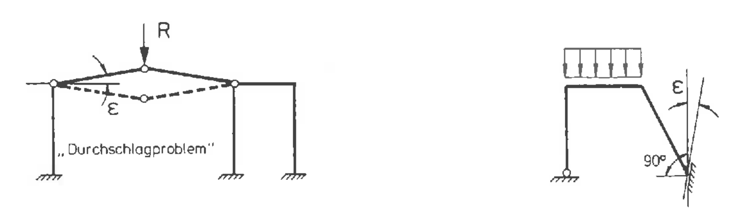


Bild 9.5 Schwach linear abhängige Tragwerke

9.4 Ersatzknotenlasten und Vorverformungen

Die Berechnung von Stabwerken mit *verteilter Belastung* (Streckenlasten), *Temperaturbeanspruchung* und *Paßungenauigkeiten* der Elemente wurde in ausführlicher Form für das Weggrößenverfahren behandelt. Die Grundlagen für die Berücksichtigung dieser "Sonderfälle" sind beim Kraftgrößenverfahren die gleichen wie beim Weggrößenverfahren. Aus diesem Grunde können wir uns hier kurz fassen und beschränken uns auf Vorverformungen und Ersatzknotenlasten für statisch bestimmt gelagerte Stabelemente (vgl. Abschnitt 7.2).

Es gelte die erweiterte Gleichgewichtsbedingung (vgl. (7.19)):

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} + \underline{R}_u \tag{9.26}$$

und entsprechend zu (7.14) die erweiterte Verträglichkeitsbedingung für Vorverformungen:

$$\underline{a}\ \underline{r} = \underline{v} + \underline{v}_u \ . \tag{9.27}$$

$\underline{R}_u$ sind Ersatzknotenlasten wie sie in Abschnitt 7.2 definiert wurden,

$\underline{v}_u'$ sind linear unabhängige Vorverformungen, die man aus den Vorverformungen $\underline{u}^i$ (vgl. Abschnitt 7.2) nach (5.15) berechnet:

$$\underline{v}^i = \underline{a}^i\ \underline{u}^i\ .$$

Die weitere Berechnung erfolgt nach dem in Abschnitt 9.1 und 9.2 beschriebenen Verfahren.

Die Stabendkräfte werden durch Last- und Eigenspannungszustände dargestellt:

$$\underline{F} = \underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) + \underline{B}_x\ \underline{X}\ . \tag{9.28}$$

Für die Verformungen gilt:

$$\underline{v} = \underline{f}\ \underline{F}\ .$$

Durch Einsetzen von (9.28) folgt:

$$\underline{v} = \underline{f}\left[\underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) + \underline{B}_x\ \underline{X}\right]. \tag{9.29}$$

Mit (9.27) erhält man:

$$\underline{a}\ \underline{r} = \underline{f}\left[\underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) + \underline{B}_x\ \underline{X}\right] + \underline{v}_u\ . \tag{9.30}$$

Die Ableitung der *Bestimmungsgleichungen* für $\underline{X}$ und $\underline{r}$ erfolgt mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten. Im wesentlichen ist dies gleichwertig mit einer Multiplikation der Gleichung (9.30) mit $\underline{B}_x^T$ von links:

$$\underline{B}_x^T\ \underline{a}\ \underline{r} = \underline{B}_x^T\ \underline{f}\left[\underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) + \underline{B}_x\ \underline{X}\right] + \underline{B}_x^T\ \underline{v}_u\ .$$

Wegen $\underline{B}_x^T\ \underline{a} \equiv \underline{a}^T\ \underline{B}_x = \underline{0}$, (nach (9.3)) folgt:

$$(\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_x)\underline{X} = -\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) - \underline{B}_x^T\ \underline{v}_u\ . \tag{9.31}$$

Analog ergibt sich die Bestimmungsgleichung für $\underline{r}$ aus einer Multiplikation mit $\underline{B}_o^T$ von links:

$$\underline{r} = \underline{B}_o^T\ \underline{f}\left[\underline{B}_o(\underline{R} + \underline{R}_u) + \underline{B}_x\ \underline{X}\right] + \underline{B}_o^T\ \underline{v}_u\ . \tag{9.32}$$

Die weitere Berechnung erfolgt nach dem in Abschnitt 7.2 dargestellten Verfahren.
Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich bei der Berechnung der Stabkräfte für $\underline{R} + \underline{R}_u = \underline{0}$. Dies tritt z.B. in einem Stabwerk auf, das unter Temperaturbelastung, für Stützensenkung oder Vorspannung zu berechnen ist. Gleichung (9.31) vereinfacht sich wie folgt:

$$(\underline{B}_x^T \, \underline{f} \, \underline{B}_x)\underline{X} = -\underline{B}_x^T \, \underline{v}_u \ , \tag{9.33}$$

und die Stabendkräfte ergeben sich aus:

$$\underline{F} = \underline{B}_x \, \underline{X} \ . \tag{9.34}$$

Dies bedeutet, daß solche "Lastfälle" Linearkombinationen der Eigenspannungszustände sind.

9.5 Bemerkungen zur Berechnung von Einflußlinien nach dem Kraftgrößenverfahren

Die Grundlagen zur Berechnung von Einflußlinien sind in Kapitel 8 ausführlich dargestellt. Wir beschränken uns deshalb hier auf die wesentlichen Merkmale der Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren.

Für alle Arten von Einflußlinien gilt

Satz 9.5: *Die Berechnung von Einflußlinien nach dem Kraftgrößenverfahren erfolgt auf der Grundlage des Superpositionsprinzips durch Überlagerung der Einflußlinien des statisch bestimmten Hauptsystems und der Einflußlinien für die statisch Unbestimmten.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 8.5 in der Anwendung auf (9.1)

$$\underline{F} = \underline{B}_o \, \underline{R} + \underline{B}_x \, \underline{X}$$

und auf (vgl. (9.17)):

$$\underline{r} = \underline{B}_o^T \underline{f}(\underline{B}_o \underline{R} + \underline{B}_x \underline{X}) .$$

Die Berechnung am *"(n-1)-fach statisch unbestimmten Tragwerk"* (Abschnitt 8.4) kann bei Stabwerken mit geringer Redundanz zu Vorteilen gegenüber dem Weggrößenverfahren führen. Die Berechnung einer Einflußlinie am statisch bestimmten System und der Einflußlinien infolge von Relativverformungen ist aus Kapitel 8 bekannt. Wir verzichten deshalb hier auf weitere Ausführungen.

9.6 Zusammenfassung des Rechenganges nach dem Kraftgrößenverfahren

Im folgenden wird eine kurzgefaßte Zusammenstellung des Rechenganges gegeben. Die Belastung wird als Knotenlastvektor $\underline{R}$ angenommen:

(1) Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} , \quad \underline{a}^T_{n\times m} \quad \text{mit} \quad m > n .$$

(2) Wahl der statisch Unbestimmten und Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ durch Ergänzung der Matrix $\underline{a}^T$ durch Einheitszeilen zu $\underline{\tilde{a}}^T$ und Inversion von $\underline{\tilde{a}}^T$.
Entweder durch
- Festlegung der statisch Unbestimmten anhand einer Skizze (Abschnitt 9.1), oder durch
- Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche und Zeilentausch (Anhang A2.1.6).

(3) Aufstellen der Flexibilitätsmatrix $\underline{f} = \text{diag}\,\{\underline{f}^i\}$.

(4) Berechnung der Matrizenprodukte

$$\underline{A} = \underline{B}_x^T \underline{f}\, \underline{B}_x \quad \text{und} \quad \underline{b} = -\underline{B}_x^T \underline{f}\, \underline{B}_o \underline{R} .$$

(5) Berechnung der statisch Unbestimmten (9.16):

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{b} \qquad \text{(Cholesky-Verfahren)}$$

(6) Berechnung der Stabendkräfte (9.1), (4.6), (3.3):

$$\underline{F} = \underline{B}_o\ \underline{R} + \underline{B}_x\ \underline{X}$$

$$\underline{S} = \text{diag}\ \{(\underline{a}^i)^T\}\ \underline{F}$$

$$\underline{S}^i = \underline{T}^i\ \underline{F}^i .$$

(7) Berechnung der Knotenverformungen (9.17):

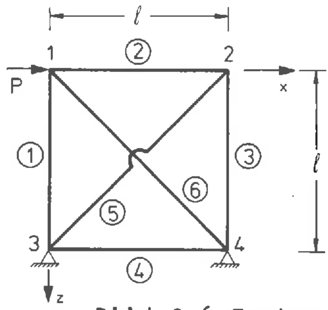
$$\underline{r} = \underline{B}_o^T\ \underline{f}\ \underline{F} .$$

(8) Verformungsberechnung wie beim Weggrößenverfahren.

9.7 Beispiele zur Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren

Die Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren wird anhand von zwei einfachen Beispielen dargestellt.
Im ersten Beispiel wird die Berechnung der statisch Unbestimmten mit dem Gauß'schen Algorithmus schrittweise erläutert. Im zweiten Beispiel wird die systematische Berechnung des Rahmens von Beispiel 6.2 mit dem Kraftgrößenverfahren dargestellt.

Beispiel 9.3:
Berechnung eines zweifach statisch unbestimmten Fachwerks (Bild 9.6) mit automatischer Wahl der statisch Unbestimmten.



$c = 1/\sqrt{2}$

$EA = \text{const.}$

Bild 9.6 Fachwerk

Gleichgewichtsmatrix:

Spalten: Elemente ①–⑥; Zeilen 1–2: Knoten 1, Zeilen 3–4: Knoten 2

$$\underline{a}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Die Zerlegung erfolgt mit dem in Anhang A2.1.3 und A2.1.6 beschriebenen Gauß'schen Algorithmus zur Lösung eines speziellen unterbestimmten Gleichungssystems:

$$\hat{\underline{a}}^T = \underline{L}\,\underline{U}\ .$$

Das Fachwerk ist zweifach statisch unbestimmt, deshalb wird die Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$ um zwei Nullzeilen erweitert. Gleichzeitig legen wir, wie in Anhang A2.1.3 beschrieben, einen Vertauschungsvektor an:

$$(\hat{\underline{a}}^T)^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ \hline & & \underline{0} & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{(Vertauschungsvektor)}$$

1. Schritt:

Die Pivotregel $(\hat{\underline{a}}^T)^1_{11} = \max\{|(\hat{\underline{a}}^T)^0_{i1}|\}$ mit $i = 1, \ldots, 4$ ergibt einen Zeilentausch von 1. und 2. Zeile:

$$(\hat{\underline{a}}^T)^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ \hline & & \underline{0} & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Die Zerlegung der ersten Spalte und der Restmatrix von $(\hat{\underline{a}}^T)^1$ ergibt keine Veränderung.

2. Schritt:

Die Anwendung der Pivotregel in der zweiten Spalte ergibt keinen Zeilentausch. Die Zerlegung der zweiten Spalte und der Restmatrix von $(\hat{\underline{a}}^T)^1$ ergibt:

$$(\hat{\underline{a}}^T)^2 = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ \hdashline & & & & & \\ & & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. Schritt:

Die Pivotregel ergibt einen Zeilentausch von 3. und 4. Zeile. Die Zerlegung der dritten Spalte und der Restmatrix von $(\hat{\underline{a}}^T)^2$ ergibt keine Veränderung:

$$(\hat{\underline{a}}^T)^3 = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c & -c \\ \hdashline & & & & & \\ & & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. Schritt:

Die Pivotregel ergibt kein Pivotelement größer Null. Die fünfte Zeile von $(\hat{\underline{a}}^T)^3$ wird als vierte Zeile der [6×6]-Einheitsmatrix angenommen. Die 4. Zeile wird mit der 5. Zeile vertauscht. Die Zerlegung der vierten Spalte und der Restmatrix von $(\hat{\underline{a}}^T)^3$ ergibt keine Veränderung:

$$(\hat{\underline{a}}^T)^4 = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c & -c \\ \hdashline & & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Schritt:

Die Pivotregel ergibt keinen Zeilentausch. Die Zerlegung der Restmatrix von $(\underline{\hat{a}}^T)^4$ ergibt keine Veränderung:

$$(\underline{\hat{a}}^T)^5 = (\underline{\hat{a}}^T)^4 \; .$$

6. Schritt:

Die Pivotregel ergibt kein Pivotelement größer Null. Die sechste Zeile von $(\underline{\hat{a}}^T)^5$ wird als sechste Zeile der [6×6]-Einheitsmatrix angenommen. Die Zerlegung ist damit beendet. Als statisch Unbestimmte wurden F_4 und F_6 gewählt:

$$\underline{\hat{a}}^T = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -c & 0 \\ & & & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c & -c \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{array}\right]$$

Damit sind $\underline{L}$, $\underline{U}$, $\underline{V}$ und $\underline{\hat{I}}$ bestimmt:

$$\underline{L} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & \underline{0} & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{U} = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ & & -1 & 0 & -c & 0 \\ & & & 1 & & \\ & & \underline{0} & & c & -c \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\underline{V} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{\hat{I}} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mit $\underline{L}$, $\underline{U}$ und $\underline{V}$ können $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ bestimmt werden. Die rechte

Seite von Gleichung (9.23) ergibt:

$$\underline{\hat{I}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch zweimaliges Rückwärtseinsetzen wird $\underline{B}_x$ nach Gleichung (9.23) bestimmt:

$$\underline{B}_x = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & -c \\ 0 & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die rechte Seite der Gleichung (9.24) ist:

$$\underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Durch viermaliges Vorwärts-Rückwärtseinsetzen wird $\underline{B}_o$ nach Gleichung (9.24) bestimmt:

$$\underline{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/c & 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für die Flexibilitätsmatrix erhält man mit Anhang A3:

$$\underline{f} = \frac{\ell}{EA}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & \underline{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \underline{0} & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Mit dem Lastvektor

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

können die Matrizenprodukte $\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_x$ und $\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_o\ \underline{R}$ berechnet werden:

$$\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_x = \frac{\ell}{EA}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_o\ \underline{R} = \frac{\ell}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 2c+1 \end{bmatrix} P .$$

Die Lösung des Gleichungssystems $-\underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_x\ \underline{X} = \underline{B}_x^T\ \underline{f}\ \underline{B}_o\ \underline{R}$ ergibt:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(2c+1)/(6+2\sqrt{2}) \end{bmatrix} P \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}558 \end{bmatrix} P .$$

Mit den statisch Unbestimmten $\underline{X}$ werden die Stabkräfte $\underline{F}$ berechnet:

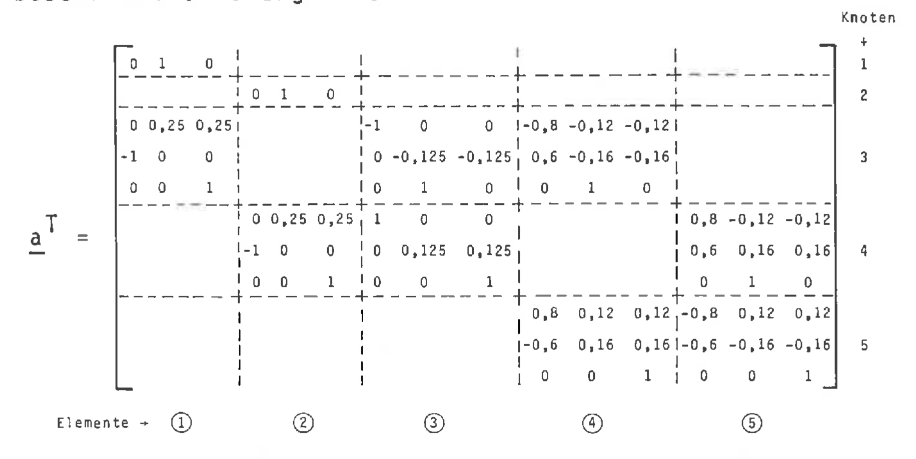
$$\underline{F} = \underline{B}_o\ \underline{R} + \underline{B}_x\ \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} -0{,}395 \\ -0{,}395 \\ -0{,}395 \\ 0 \\ 0{,}558 \\ 0{,}558 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -0{,}395 \\ -1{,}395 \\ -1{,}395 \\ 0 \\ 1{,}972 \\ 0{,}558 \end{bmatrix} P .$$

Beispiel 9.4:

Der in den Beispielen 6.2 bis 6.4 mit verschiedenen Varianten des Weggrößenverfahrens berechnete Rahmen (Bild 9.7 (a)) wird im folgenden nach dem Kraftgrößenverfahren berechnet.

Aus dem Elementkatalog (Anhang A3) wird das Stabelement

Typ-a für die Elemente ① bis ⑤ gewählt.
Die Besetzung der Gleichgewichtsmatrix wird in Beispiel 6.2 beschrieben. Es ergibt sich:

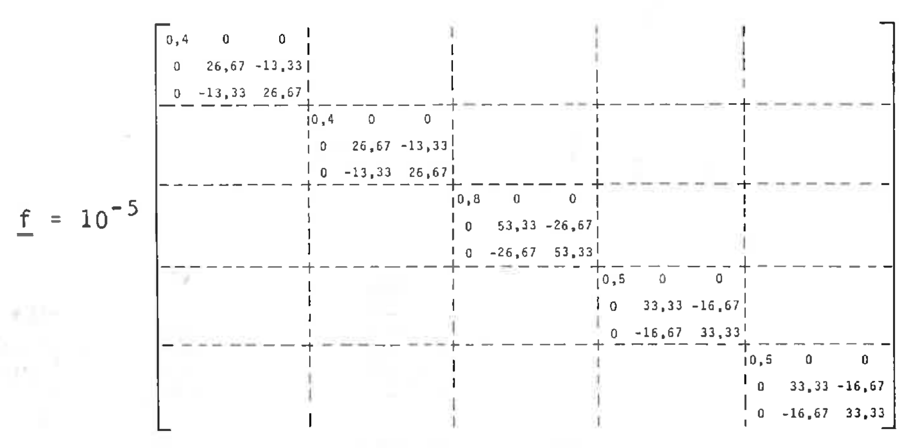


$\underline{a}^T =$

①			②			③			④			⑤			Knoten ↓
0	1	0													1
			0	1	0										2
0	0,25	0,25				-1	0	0	-0,8	-0,12	-0,12				
-1	0	0				0	-0,125	-0,125	0,6	-0,16	-0,16				3
0	0	1				0	1	0	0	1	0				
			0	0,25	0,25	1	0	0				0,8	-0,12	-0,12	
			-1	0	0	0	0,125	0,125				0,6	0,16	0,16	4
			0	0	1	0	0	1				0	1	0	
									0,8	0,12	0,12	-0,8	0,12	0,12	
									-0,6	0,16	0,16	-0,6	-0,16	-0,16	5
									0	0	1	0	0	1	

Elemente → ① ② ③ ④ ⑤

Die Hyperdiagonalmatrix der Flexibilitätsmatrizen $\underline{f}^i$ ist:



$\underline{f} = 10^{-5}$

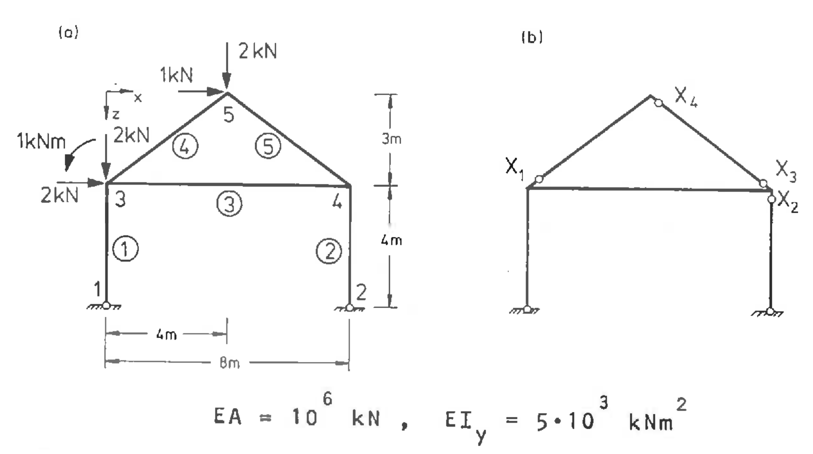
0,4	0	0												
0	26,67	-13,33												
0	-13,33	26,67												
			0,4	0	0									
			0	26,67	-13,33									
			0	-13,33	26,67									
						0,8	0	0						
						0	53,33	-26,67						
						0	-26,67	53,33						
									0,5	0	0			
									0	33,33	-16,67			
									0	-16,67	33,33			
												0,5	0	0
												0	33,33	-16,67
												0	-16,67	33,33

Der Lastvektor ist:

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Für die Lösung des Gleichungssystemes verwenden wir SMIS /37/.
Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt:

```
LOAD    F1 = AT    N1 = 11    N2 = 15
:
```



$$EA = 10^6 \text{ kN}, \quad EI_y = 5 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

Bild 9.7 Rahmen mit statisch bestimmtem Hauptsystem

Es folgen zeilenweise die Elemente der Gleichgewichtsmatrix $\underline{a}^T$.

```
LOAD     F1 = KF     N1 = 15     N2 = 15
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Flexibilitätsmatrix $\underline{f}$.

```
LOAD     F1 = R      N1 = 11     N2 = 1
  :
```

Es folgen die Elemente des Lastvektors $\underline{R}$.

```
PSINV    F1 = AT     F2 = A      F3 = BO     F4 = BX
PRINT    F1 = A
```

Die Matrix $\underline{a}^T$ wird zerlegt; $\underline{B}_0$ und $\underline{B}_x$ werden berechnet. Die Nummern der zu den statisch Unbestimmten gehörenden Komponenten von $\underline{F}$ werden ausgegeben+):

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

In Bild 9.7(b) ist das zugehörige statisch bestimmte Hauptsystem dargestellt.

```
TRMULT   F1 = BX     F2 = KF     F3 = BXTF
```

+) Mit PSINV wird in SMIS die Halbinverse einer zeilenregulären Rechteckmatrix nach dem Verfahren von Gauß-Jordan (Zeilenpivotsuche und Spaltentausch) berechnet.

Das Matrizenprodukt $\underline{B}_x^T \; \underline{f}$ wird gebildet.

```
MULT     F1 = BXTF       F2 = BX        F3 =BXTFBX
SCALE    F1 = BXTFBX     S1 = -1.0
```

Das Matrizenprodukt $-\underline{B}_x^T \; \underline{f} \; \underline{B}_x$ wird gebildet.

```
MULT     F1 = BO         F2 = R         F3 = BOR
MULT     F1 = BXTF       F2 = BOR       F3 = BXFBOR
```

Das Matrizenprodukt $\underline{B}_x^T \; \underline{f} \; \underline{B}_o \; \underline{R}$ wird gebildet.

```
SOLVE    F1 = BXTFBX     F2 = BXFBOR
PRINT    F1 = BXFBOR
```

Das Gleichungssystem $-\underline{B}_x^T \; \underline{f} \; \underline{B}_x \; \underline{X} = \underline{B}_x^T \; \underline{f} \; \underline{B}_o \; \underline{R}$ wird gelöst, und die statisch Unbestimmten $\underline{X}$ werden ausgegeben:

$$\underline{X}^T = \begin{bmatrix} -2{,}212 & 5{,}798 & -2{,}674 & -0{,}123 \end{bmatrix}.$$

```
MULT     F1 = BX         F2 = BXFBOR    F3 = F
ADD      F1 = F          F2 = BOR
PRINT    F1 = F
```

Die linear unabhängigen Stabendkräfte werden berechnet ($\underline{F} = \underline{B}_x \; \underline{X} + \underline{B}_o \; \underline{R}$) und ausgegeben:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -1{,}250 \\ 0 \\ 6{,}202 \\ \hdashline -2{,}750 \\ 0 \\ 5{,}798 \\ \hdashline 0{,}266 \\ -2{,}989 \\ -3{,}124 \\ \hdashline -0{,}581 \\ -2{,}212 \\ 0{,}123 \\ \hdashline -2{,}564 \\ -2{,}674 \\ -0{,}123 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ -M_{11} \\ M_{13} \\ \hdashline N_2 \\ -M_{22} \\ M_{24} \\ \hdashline N_3 \\ -M_{33} \\ M_{34} \\ \hdashline N_4 \\ -M_{43} \\ M_{45} \\ \hdashline N_5 \\ -M_{54} \\ M_{55} \end{bmatrix} \qquad \text{Dimension } [\,kN,\ kNm\,]$$

```
MULT     F1 = KF         F2 = F         F3 = V
```

```
TRMULT    F1 = BO     F2 = V     F3 = KR
PRINT     F1 = KR
```

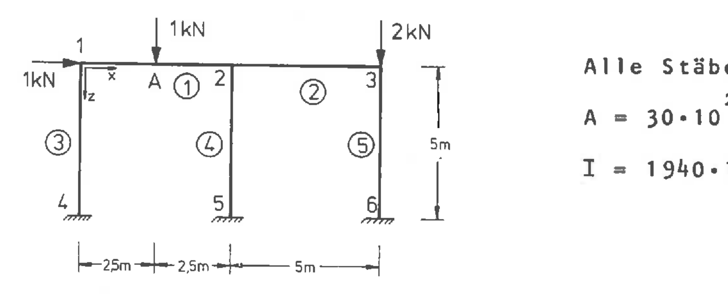
Die Elementverformungen $\underline{v} = \underline{f}\,\underline{F}$ und die Knotenverformungen $\underline{r} = \underline{B}_0^T\,\underline{f}\,\underline{F}$ werden berechnet, und die Knotenverformungen werden ausgegeben:

$$\underline{r} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -3,243 \\ \hline -3,189 \\ \hline 9,662 \\ 0,005 \\ -0,762 \\ \hline 9,665 \\ 0,011 \\ -0,870 \\ \hline 9,672 \\ 0,023 \\ 0,406 \end{bmatrix} \qquad \text{Dimension [rad, m]}$$

Es ergeben sich die gleichen Stabendkräfte und Knotenverformungen wie in Beispiel 6.2. Mit den Stabendkräften können die Zustandslinien ermittelt werden. Es wird an dieser Stelle darauf verzichtet, die Zustandslinien darzustellen. In den Bildern 6.3 und 6.4 findet man die graphische Darstellung.

Aufgaben:

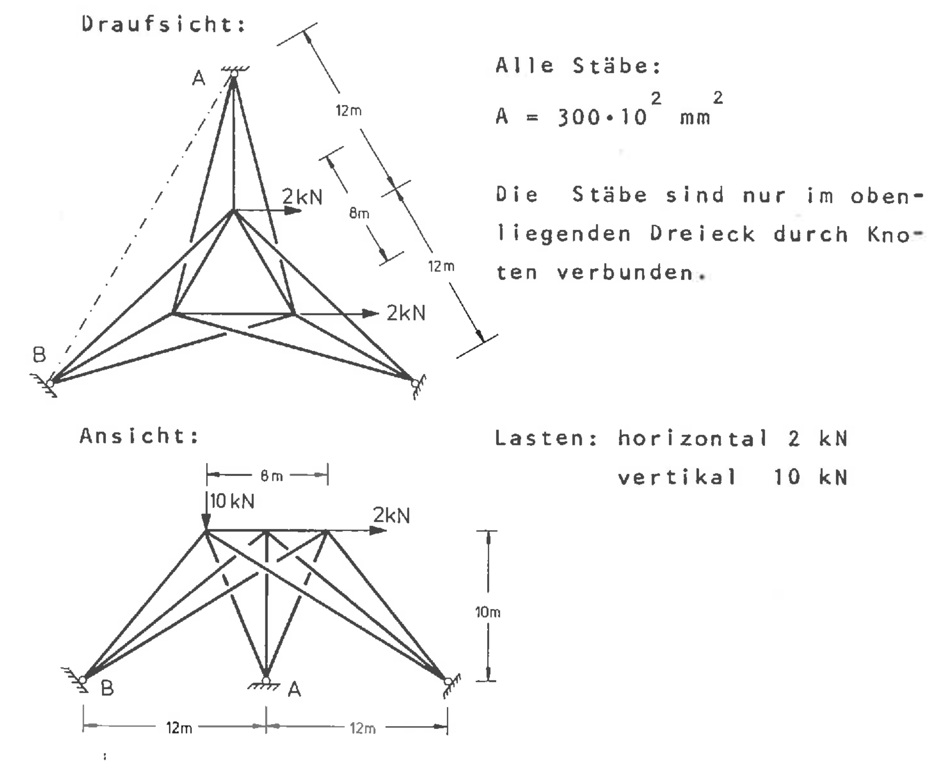
9.1 Der dargestellte Rahmen ist nach dem Kraftgrößenverfahren zu berechnen.



Für die Berechnung sind die statisch Unbestimmten "von Hand" zu wählen.

9.2 Für den Rahmen (Aufgabe 9.1) ist dieselbe Berechnung für ein Momentengelenk in A durchzuführen.

9.3 Für das im folgenden dargestellte räumliche Stabsystem aus Fachwerkelementen sind die Schnittgrößen zu berechnen. Hierbei ist das statisch bestimmte Hauptsystem aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen.



Alle Stäbe:

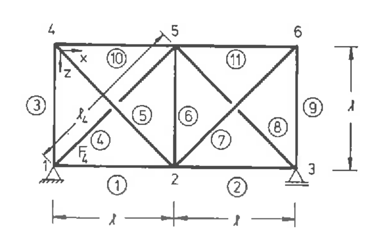
$A = 300 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$

Die Stäbe sind nur im obenliegenden Dreieck durch Knoten verbunden.

Lasten: horizontal 2 kN
vertikal 10 kN

9.4 Wie groß sind die zusätzlichen inneren Kräfte, wenn in dem Fachwerkturm der Abstand der Lager $\overline{AB}$ um 100 mm durch eine Zwangsverformung der Lager verkürzt wird?

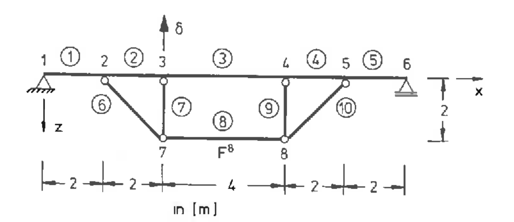
9.5 Wie groß muß in dem dargestellten Fachwerk die Stabkraft F_4 gewählt werden, wenn sich $\Delta\ell_4$ zu $0{,}1\ \ell_4$ ergeben soll?



Querschnittswerte:

Alle Stäbe mit gleicher Querschnittsfläche A

9.6 Wie groß muß in dem unterspannten Träger die Stabkraft F^8 gewählt werden, damit sich eine Durchbiegung $\delta = 0{,}1$ m einstellt?



Stabelemente:

$I = 3 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$A = 10^{-2}\ m^2$

Fachwerkelemente:

$A = 0{,}1 \cdot 10^{-2}\ m^2$

10 Das Verfahren der Übertragungsmatrizen

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen wurde für die Berechnung beliebig gelagerter ebener oder räumlicher Durchlaufträger entwickelt /18/. Man bezeichnet dieses Verfahren auch als *Übertragungs- oder Reduktionsverfahren.*
Eine wesentliche Voraussetzung ist, daß an keinem Knoten des Stabtragwerkes mehr als zwei Elemente anschließen (Bild 10.1).
Wir wollen uns im folgenden auf ebene Systeme beschränken. Eine weitergehende Darstellung des Übertragungsverfahrens findet man bei Kersten /35/.
Übertragungsmatrizen für gekrümmte und für gerade und gekrümmte, elastisch gebettete Stabelemente findet man bei Petersen (/61/, /62/, /63/).

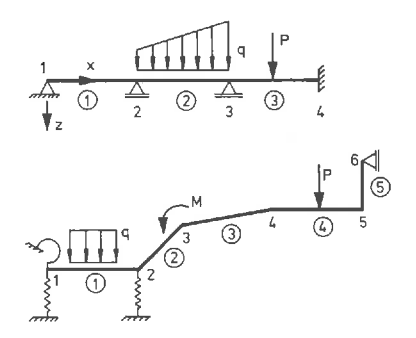


Bild 10.1 Beispiele ebener Durchlaufträger

10.1 Der Grundgedanke des Übertragungsverfahrens

Bei jedem ebenen Stabelement können pro Elementende (Knoten) sechs *Zustandsgrößen* definiert werden. Es sind dies die drei Kraftgrößen:

Normalkraft (N),
Querkraft (Q) und
Biegemoment (M),

und die drei Verformungsgrößen:

Verschiebung in Stablängsrichtung (u),
Durchbiegung senkrecht zur Stabachse (w) und
Stabendverdrehung (φ).

Durch die spezielle Form der Stabtragwerke kann stets ein Anfangs- und ein Endknoten festgelegt werden. An einem solchen Anfangs- oder Endknoten sind stets drei der Zustandsgrößen bekannt und drei unbekannt. Welche der Zustandsgrößen bekannt und welche unbekannt sind, hängt von den Randbedingungen des Anfangs- bzw. des Endknotens ab. In Bild 10.2 sind Beispiele für die Ausführung von Anfangsknoten zusammengestellt; für Endknoten gelten analoge Beziehungen.

Anfangs-knoten 1	Zustandsgrößen im Knoten 1 bekannt:	unbekannt:
(a)	$u,\ w,\ \varphi \equiv 0$	N, Q, M
(b)	$N,\ Q,\ M \equiv 0$	u, w, φ
(c) c_w	$N,\ M \equiv 0$ $\lvert Q \rvert = c_w\ w$	u, w, φ

Bild 10.2 Beispiele für Anfangsknoten

Betrachtet man ein einzelnes Element eines Stabwerkes, so können alle Zustandsgrößen des rechten Knotens durch die Zustandsgrößen des linken Knotens (und umgekehrt) ausgedrückt werden; hierbei werden die Kraftgrößen mit den Gleichgewichtsbedingungen und die Verformungsgrößen mit den kinematischen Verträglichkeitsbedingungen und den Flexibilitätsbeziehungen ermittelt. Ebenso können an einem Knoten die Zustandsgrößen rechts vom Knoten durch die Zustandsgrößen links vom Knoten ausgedrückt werden.

Benutzt man diese Eigenschaften, so kann man für einen beliebig belasteten Durchlaufträger ohne Gelenke und ohne

starre Lager zwischen Anfangs- und Endknoten das Übertragungsverfahren entwickeln. In Abhängigkeit von den drei unbekannten Zustandsgrößen des Anfangsknotens (linker Knoten des ersten Elementes) werden bei einem *ersten Berechnungsgang* die Zustandsgrößen aller Knoten infolge einer äußeren Belastung sukzessive ermittelt. Man erhält so die Zustandsgrößen des Endknotens in Abhängigkeit von den drei unbekannten Zustandsgrößen des Anfangsknotens.
Das zu lösende Gleichungssystem hat die Dimension [6×6] mit jeweils drei unbekannten Zustandsgrößen des Anfangs- und Endknotens.
In einem *zweiten Berechnungsgang* werden die Zustandsgrößen der Elemente aus den sechs bekannten Zustandsgrößen des Anfangsknotens wiederum sukzessive berechnet.
Im Gegensatz zum Weggrößen- und Kraftgrößenverfahren (Kapitel 6 und 9) ist die Dimension der zu lösenden Gleichungssysteme von der Anzahl der Knoten und Elemente unabhängig.

Sind bei einem Durchlaufträger zwischen Anfangs- und Endknoten *Gelenke* oder *starre Lager* angeordnet, so ergeben sich zusätzlich unbekannte Verformungs- bzw. Kraftgrößen und zusätzliche Bestimmungsgleichungen infolge von Kraft- bzw. Verformungsbedingungen (Bild 10.3). Die zusätzlichen unbekannten Zustandsgrößen werden im folgenden als *Sprunggrößen* bezeichnet.

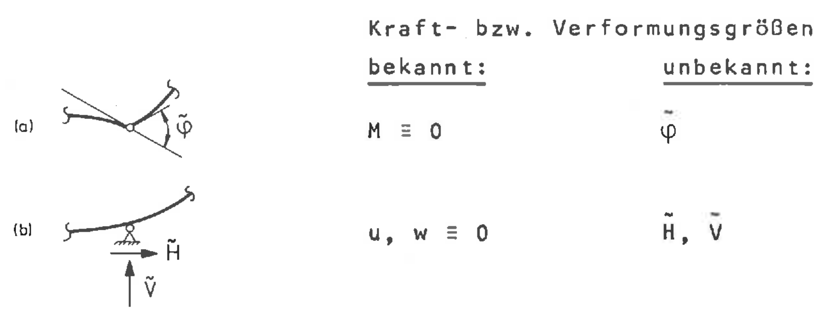


Bild 10.3 Gelenk und Lager mit Sprunggrößen

10.2 Zustandsvektoren und Übertragungsmatrizen

An einem *unbelasteten Element* wird ein bekannter Vektor von Stabendkräften ($\underline{\bar{S}}^{\ell}$) mit den Gleichgewichtsbedingungen vom linken zum rechten Knoten übertragen.
In Bild 10.4 sind die Komponenten der Stabendkraftvektoren $\underline{\bar{S}}^{\ell}$ und $\underline{\bar{S}}^{r}$ eines ebenen Stabelementes dargestellt. Beim Übertragungsverfahren werden alle Zustandsgrößen in den *lokalen Koordinaten* des betrachteten Elementes angegeben.

Bild 10.4 Kraft- und Verformungsgrößen eines ebenen Stabelementes

Für die Stabendkräfte des rechten Knotens des Elementes (i) gilt:

$$\underline{\bar{S}}_i^{r} = \underline{G}_i \, \underline{\bar{S}}_i^{\ell} \; . \tag{10.1}$$

$\underline{G}$ wird als Kraftübertragungsmatrix bezeichnet und ist wegen ihrer Eindeutigkeit regulär.
Die Stabendverformungen des linken Knotens werden ebenfalls zum rechten Knoten übertragen. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt für virtuelle Kräfte $\underline{\hat{S}}_i^{\ell}$ und $\underline{\hat{S}}_i^{r}$ in Richtung von $\underline{\bar{u}}_i^{\ell}$ und $\underline{\bar{u}}_i^{r}$:

$$(\underline{\hat{S}}_i^{r})^T \, \underline{\bar{u}}_i^{r} + (\underline{\hat{S}}_i^{\ell})^T \, \underline{\bar{u}}_i^{\ell} = (\underline{\hat{S}}_i^{\ell})^T \, \underline{\bar{u}}_i^{e} \; . \tag{10.2}$$

Dabei stellt die linke Seite der Gleichung die äußere und die rechte Seite die innere Arbeit dar. Die inneren elastischen Verformungen werden mit $\underline{\bar{u}}_i^{e}$ bezeichnet; sie werden am linken Knoten definiert.
Setzt man für die virtuellen Kräfte $\underline{\hat{S}}_i^{r}$ Gleichung (10.1) ein, so ergibt sich

$$(\underline{\hat{S}}_i^{\ell})^T \, \underline{G}_i^T \, \underline{\bar{u}}_i^{r} + (\underline{\hat{S}}_i^{\ell})^T \, \underline{\bar{u}}_i^{\ell} = (\underline{\hat{S}}_i^{\ell})^T \, \underline{\bar{u}}_i^{e} \; .$$

Für beliebige $\underline{\hat{S}}_i^\ell$ ist

$$\underline{G}_i^T \, \underline{\bar{u}}_i^r + \underline{\bar{u}}_i^\ell = \underline{\bar{u}}_i^e \, .$$

Daraus können die Verformungen am rechten Knoten berechnet werden:

$$\underline{\bar{u}}_i^r = -(\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{\bar{u}}_i^\ell + (\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{\bar{u}}_i^e \, . \qquad (10.3)$$

Es gilt ein zur Gleichung (5.4) analoges Werkstoffgesetz

$$\underline{\bar{u}}_i^e = \underline{f}_i \, \underline{\bar{S}}_i^\ell \, . \qquad (10.4)$$

Wir definieren den Zustandsvektor des linken und rechten Knotens zu

$$\underline{\bar{z}}_i^\ell = \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}_i^\ell \\ \underline{\bar{S}}_i^\ell \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{z}}_i^r = \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}_i^r \\ \underline{\bar{S}}_i^r \end{bmatrix} \qquad (10.5)$$

Für die Übertragung vom linken zum rechten Knoten eines Elementes ergibt sich damit aus (10.1), (10.3) und (10.4):

$$\begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}_i^r \\ \underline{\bar{S}}_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\underline{G}_i^T)^{-1} & (\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{f}_i \\ \underline{0} & \underline{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}_i^\ell \\ \underline{\bar{S}}_i^\ell \end{bmatrix} \qquad (10.6)$$

Mit der Übertragungsmatrix

$$\underline{\tilde{U}}_i = \begin{bmatrix} -(\underline{G}_i^T)^{-1} & (\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{f}_i \\ \underline{0} & \underline{G}_i \end{bmatrix} \qquad (10.7)$$

gilt allgemein

$$\underline{\bar{z}}_i^r = \underline{\tilde{U}}_i \, \underline{\bar{z}}_i^\ell \, . \qquad (10.8)$$

Ist ein Element belastet, so ist

$$\underline{\bar{z}}_i^r = \underline{\tilde{U}}_i \, \underline{\bar{z}}_i^\ell + \underline{\tilde{z}}_i^o \qquad (10.9)$$

mit $\underline{\tilde{z}}_i^o$ als Zuwachs des Zustandsvektors infolge einer Belastung zwischen den Knoten des Elementes; bei Streckenlasten

erhält man $\underline{\tilde{z}}_i^o$ durch Integration:

$$\underline{\tilde{z}}_i^o = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}_i^o \\ \underline{\tilde{S}}_i^o \end{bmatrix} \qquad (10.10)$$

$\underline{\tilde{u}}_i^o$ ergibt den Zuwachs der Stabendverformungen des rechten Knotens und $\underline{\tilde{S}}_i^o$ den der Stabendkräfte am rechten Knoten infolge der Belastung. Wir bezeichnen im folgenden $\underline{\tilde{z}}_i^o$ als *Lastvektor des Elementes*.

Gleichung (10.9) macht es somit möglich, den Zustandsvektor vom linken Knoten des Elementes (i) zum rechten Knoten des Elementes unter Berücksichtigung von äußeren Lasten zu übertragen.

Im nächsten Schritt werden die Zustandsgrößen vom rechten Knoten (Stabende) des Elementes (i) ($\underline{\bar{z}}_i^r$) zum linken Knoten (Stabende) des Elementes (i+1) ($\underline{\bar{z}}_{i+1}^\ell$) übertragen.

- Die Elemente des Durchlaufträgers sind mit (1) beginnend fortlaufend numeriert. Das Element (i) hat links die Knotennummer i und rechts die Knotennummer i+1. -

Für die Übertragung am Knoten k soll gelten:

$$\underline{\bar{z}}_{i+1}^\ell = \underline{\bar{U}}_k \, \underline{\bar{z}}_i^r \, . \qquad (10.11)$$

Dabei ist $\underline{\bar{U}}_k$ die Übertragungsmatrix des Knotens k, die entsprechend der Ausbildung des Knotens k besetzt ist.

Für einen ungelagerten, knick- und gelenkfreien Knoten hat $\underline{\bar{U}}_k$ die Form:

$$\underline{\bar{U}}_k = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{I} \end{bmatrix} \qquad (10.12)$$

Ist ein Knoten belastet, so denkt man sich die Belastung an einem Stabende eines *Elementes* angreifend. Man berücksichtigt also auch Knotenlasten bei der Berechnung des Lastvektors $\underline{\tilde{z}}_i^o$ bzw. $\underline{\tilde{z}}_{i+1}^o$.

Da beim Übertragungsverfahren immer im lokalen Koordinatensystem gerechnet wird, sind bei einem Knick des Durchlauf-

trägers im Knoten k die Stabendkräfte und -verformungen zu drehen. Man benutzt dazu die Drehungsmatrix $\underline{L}_k$ (entspricht $\underline{L}^i$ von Gleichung (3.7)). Für die Berechnung des Winkels wird das lokale Koordinatensystem des Elementes (i+1) als globales und das des Elementes (i) als lokales Koordinatensystem interpretiert. Bei einem Knick ist also

$$\overline{\underline{U}}_k = \begin{bmatrix} \underline{L}_k & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{L}_k \end{bmatrix} \qquad (10.13)$$

Ist der Knoten k elastisch gelagert, so ist mit $\underline{c}_k$ als Matrix der Federkonstanten

$$\overline{\underline{U}}_k = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{c}_k & -\underline{I} \end{bmatrix} \qquad (10.14)$$

In Bild 10.5 wird diese Beziehung für Dreh- und Senkfedern verdeutlicht.

Bild 10.5 Kräfte und Verformungen an Lagerpunkten mit Federn

Für einen Knoten k ohne starre Lagerung und ohne Gelenk ergibt die Zusammenfassung der Gleichungen (10.12) bis (10.14) für die Übertragungsmatrix

$$\overline{\underline{U}}_k = \begin{bmatrix} \underline{L}_k & \underline{0} \\ -\underline{c}_k & -\underline{L}_k \end{bmatrix} \qquad (10.15)$$

Bei starren Lagern und Gelenken ergeben sich zusätzliche unbekannte Kraft- bzw. Verformungsgrößen $\overline{\underline{z}}_k$, nämlich Aufla-

gergrößen und gegenseitige Verformungen (Bild 10.3). An Stelle von Gleichung (10.11) gilt dann

$$\bar{\underline{z}}^{\ell}_{i+1} = \bar{\underline{U}}_k \, \bar{\underline{z}}^{r}_{i} + \tilde{\underline{z}}_k \, . \qquad (10.16)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Sprunggrößen zu erfassen. Einmal kann man die mechanische Bedeutung der zugehörigen Kraft- bzw. Verformungsgröße ändern und die folgende Berechnung nicht mit der ursprünglichen Zustandsgröße sondern mit der Summe aus Zustands- und Sprunggröße durchführen. In diesem Fall bliebe die Größe des zu lösenden Gleichungssystems erhalten. In einem zweiten Berechnungsgang müßten die Sprunggrößen ermittelt werden. Eine andere Möglichkeit ist, die mechanische Bedeutung beizubehalten und den Vektor der unbekannten Zustandsgrößen um die Sprunggröße zu erweitern. Diese Methode führt zwar zu einer direkten Erweiterung der Dimension des Problems, ist bei einer Systematisierung der Berechnung jedoch von Vorteil.
Bei der praktischen Berechnung macht man die Übertragung nicht für jedes Element und jeden Knoten einzeln, sondern überträgt in einem Schritt vom linken Knoten des Elementes ⓘ zum linken Knoten des Elementes (i+1). Die Übertragungen nach Gleichung (10.9) und Gleichung (10.16) ergeben

$$\bar{\underline{z}}^{\ell}_{i+1} = \bar{\underline{U}}_k \, \tilde{\underline{U}}_i \, \bar{\underline{z}}^{\ell}_{i} + \tilde{\underline{z}}_k + \bar{\underline{U}}_k \, \tilde{\underline{z}}^{o}_{i} \, .$$

Das Produkt der Matrizen $\bar{\underline{U}}_k$ nach Gleichung (10.15) und $\tilde{\underline{U}}_i$ nach Gleichung (10.7) fassen wir zu einer neuen Übertragungsmatrix $\underline{U}_i$ zusammen. Die Übertragung von $\tilde{\underline{z}}^{o}_{i}$ über den Knoten k ergibt den neuen Lastvektor $\bar{\underline{z}}^{o}_{i}$:

$$\bar{\underline{U}}_k \, \tilde{\underline{U}}_i \equiv \underline{U}_i = \begin{bmatrix} -\underline{L}_k \, (\underline{G}_i^T)^{-1} & \underline{L}_k \, (\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{f}_i \\ \underline{c}_k \, (\underline{G}_i^T)^{-1} & -(\underline{c}_k \, (\underline{G}_i^T)^{-1} \, \underline{f}_i + \underline{L}_k \, \underline{f}_i) \end{bmatrix} \qquad (10.17)$$

und $$\bar{\underline{z}}^{o}_{i} = \underline{U}_k \, \tilde{\underline{z}}^{o}_{i} \, .$$

Somit ist $$\bar{\underline{z}}^{\ell}_{i+1} = \underline{U}_i \, \bar{\underline{z}}^{\ell}_{i} + \tilde{\underline{z}}_k + \bar{\underline{z}}^{o}_{i} \, . \qquad (10.18)$$

10.3 Das Verfahren der Übertragung

Mit Gleichung (10.18) und der Übertragungsmatrix nach Gleichung (10.17) können nun, wie in Abschnitt 10.1 beschrieben, die Zustandsvektoren in den einzelnen Elementen in Abhängigkeit von den unbekannten Zustandsgrößen des Anfangsvektors sukzessive berechnet werden.
Ausgehend vom Zustandsvektor $\bar{\underline{z}}_1^\ell$ ergeben sich bei einem Durchlaufträger mit n Elementen die Zustandsvektoren $\bar{\underline{z}}_2^\ell$ bis $\bar{\underline{z}}_n^\ell$ zu:

$$\bar{\underline{z}}_2^\ell = \underline{U}_1 \bar{\underline{z}}_1^\ell + \tilde{\underline{z}}_2 + \bar{\underline{z}}_1^0$$

$$\bar{\underline{z}}_3^\ell = \underline{U}_2 \bar{\underline{z}}_2^\ell + \tilde{\underline{z}}_3 + \bar{\underline{z}}_2^0 \equiv \underline{U}_2 \underline{U}_1 \bar{\underline{z}}_1^\ell + \underline{U}_2 (\tilde{\underline{z}}_2+\bar{\underline{z}}_1^0) + \tilde{\underline{z}}_3 + \bar{\underline{z}}_2^0$$

$$\bar{\underline{z}}_4^\ell = \underline{U}_3 \bar{\underline{z}}_3^\ell + \tilde{\underline{z}}_4 + \bar{\underline{z}}_3^0$$

$$\equiv \underline{U}_3 \underline{U}_2 \underline{U}_1 \bar{\underline{z}}_1^\ell + \underline{U}_3 \underline{U}_2 (\tilde{\underline{z}}_2+\bar{\underline{z}}_1^0) + \underline{U}_3 (\tilde{\underline{z}}_3+\bar{\underline{z}}_2^0) + \tilde{\underline{z}}_4 + \bar{\underline{z}}_3^0$$

$$\vdots$$

$$\bar{\underline{z}}_{n+1}^\ell = \underline{U}_n \bar{\underline{z}}_n^\ell + \tilde{\underline{z}}_{n+1} + \bar{\underline{z}}_n^0 \qquad (10.19)$$

$$\equiv \prod_{i=n,-1}^{1} \underline{U}_i \bar{\underline{z}}_1^\ell + \sum_{j=2}^{n} \Big(\prod_{i=n,-1}^{j} \underline{U}_i (\tilde{\underline{z}}_j+\bar{\underline{z}}_{j-1}^0)\Big) + \tilde{\underline{z}}_{n+1} + \bar{\underline{z}}_n^0$$

Der Vektor der Zustandsgrößen des Endpunktes wird mit $\bar{\underline{z}}_{n+1}^\ell$ bezeichnet. Wenn am Ende des Durchlaufträgers Lagerbedingungen vorhanden sind, können diese im Vektor der Sprunggrößen $\tilde{\underline{z}}_{n+1}$ erfaßt werden. Das Ende des Durchlaufträgers ist dann ungelagert und es gilt:

$$\bar{\underline{s}}_{n+1}^\ell = \underline{0} \, .$$

Eine andere Möglichkeit zur Erfassung der Lagerbedingungen am Ende des Durchlaufträgers ist, diese im Zustandsvektor $\bar{\underline{z}}_{n+1}^\ell$ als Unbekannte zu berücksichtigen.
Die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems ist gleich der Summe aus Anzahl der Sprunggrößen und der Dimension von $\bar{\underline{z}}_1^\ell$ (im ebenen Fall sechs).
Wie oben erwähnt, sind in einem zweiten Berechnungsgang die

Zustandsgrößen in den einzelnen Elementen durch wiederholte Matrizenmultiplikation zu berechnen.

Aufgaben, wie man sie mit dem Übertragungsverfahren löst, werden als Randwertprobleme bezeichnet.

Das Verfahren wurde ursprünglich für die Berechnung mit Tischrechenmaschinen entwickelt. Es wird jedoch auch heute noch bei der Berechnung von Durchlaufträgern in kleineren Rechenanlagen verwendet.

Es ist möglich, andere Stabtragwerke (Bild 10.6) mit dem Übertragungsverfahren zu berechnen /35/. In einem solchen Fall müssen Teile des Tragwerks *angefedert* werden. Die Berechnung ist jedoch nicht mehr exakt.

Ein Problem ist die im Vergleich zum Weggrößenverfahren relativ große numerische Instabilität, die durch die wiederholte Multiplikation und die damit verbundenen Rundungsfehler verursacht wird /95/.

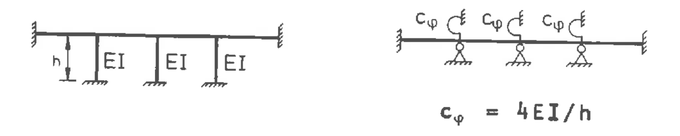


Bild 10.6 Rahmentragwerk mit Idealisierung als Durchlaufträger unter Vernachlässigung von Normalkraftverformungen

Das Übertragungsverfahren ist damit beschrieben. Einen Überblick über die erforderlichen Einzelschritte gibt die folgende

Zusammenfassung der Berechnung nach dem Übertragungsverfahren

(1) Festlegung der Element- und Knotennumerierung;
(2) Festlegung der Zustandsvektoren von Anfangs- und Endknoten;
(3) Festlegung der Sprunggrößen;
(4) Besetzung der Übertragungsmatrizen $\underline{U}_i$ und der Lastvektoren $\underline{\bar{z}}_i^o$;

(5) Berechnung des Produktes $\prod_i \underline{U}_i$ und der Produktsummen $\sum_j \prod_i \underline{U}_i \, \underline{\bar{Z}}^o_{j-1}$ und $\sum_j \prod_i \underline{U}_i \, \underline{\tilde{z}}_j$ nach Gleichung (10.19);

(6) Lösung des Gleichungssystems aus (10.19) und den Bedingungsgleichungen für die Sprunggrößen;

(7) Wiederholung der Produkte von (5) und elementweise Berechnung der Zustandsgrößen.

10.4 Übertragungsmatrizen und Zustandsvektoren des ebenen Stabelementes

Für das ebene Stabelement sind die Zustandgrößen des linken und rechten Stabendes in Bild 10.4 dargestellt.
Die Kraftübertragungsmatrix nach Gleichung (10.1) wird aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt:

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\ell & -1 \end{bmatrix} \tag{10.20}$$

Die Inverse der Transponierten von $\underline{G}_i$ ist

$$(\underline{G}_i^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ell \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

Die Flexibilitätsmatrix wird analog zu der des ebenen Stabelementes Typ-b gebildet:

$$\underline{f}_i = \frac{\ell}{6EI_y} \begin{bmatrix} 6I_y/A & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^2 & 3\ell \\ 0 & 3\ell & 6 \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

Die Drehungsmatrix ist mit der von Kapitel 3 identisch:

$$\underline{L}_k = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10.23)$$

Für die Matrix der Federsteifigkeiten wird eine Diagonalmatrix angenommen:

$$\underline{c}_k = \begin{bmatrix} c_u & 0 & 0 \\ 0 & c_w & 0 \\ 0 & 0 & c_\varphi \end{bmatrix} \qquad (10.24)$$

Damit kann die Übertragungsmatrix $\underline{U}_i$ für das ebene Stabelement entsprechend Gleichung (10.17) gebildet werden:

$$\underline{U}_i = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & s\ell & -c\ell/(EA) & -s\ell^3/(6EI_y) & -s\ell^2/(2EI_y) \\ s & c & -c\ell & -s\ell/(EA) & c\ell^3/(6EI_y) & c\ell^2/(2EI_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\ell^2/(2EI_y) & -\ell/(EI_y) \\ \hline -c_u & 0 & 0 & c+c_u\ell/(EA) & -s & 0 \\ 0 & -c_w & c_w\ell & s & c-c_w\ell^3/(6EI_y) & -c_w\ell^2/(2EI_y) \\ 0 & 0 & -c_\varphi & 0 & \ell+c_\varphi\ell^2/(2EI_y) & 1+c_\varphi\ell/(EI_y) \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \end{array}$$

(Spalten: $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$)

$(c = \cos\alpha\ ,\quad s = \sin\alpha)$ (10.25)

Für den ebenen Durchlaufträger ohne Knicke vereinfacht sich unter Vernachlässigung der Normalkraftverformungen die Übertragungsmatrix. In diesem Fall ist

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \cos\alpha = 1$$

und die zur Normalkraftverformung $\bar{u}_1$ und zur Normalkraft $\bar{S}_1$ gehörigen Zeilen und Spalten in $\underline{U}_i$ können gestrichen werden.

Damit ergibt sich:

$$\underline{U}_i = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\ell & \ell^3/(6EI_y) & \ell^2/(2EI_y) \\ 0 & 1 & -\ell^2/(2EI_y) & -\ell/(EI_y) \\ \hline -c_w & c_w\ell & 1-c_w\ell^3/(6EI_y) & -c_w\ell^2/(2EI_y) \\ 0 & -c_\varphi & \ell+c_\varphi\ell^2/(2EI_y) & 1+c_\varphi\ell/(EI_y) \end{array}\right] \tag{10.26}$$

Für das Übertragungsverfahren werden neben den Übertragungsmatrizen $\underline{U}_i$ die Lastvektoren $\underline{\bar{z}}_i^0$ benötigt, die den Einfluß der Belastung im Element ⓘ auf den linken Knoten des Elementes (i+1) erfassen, d.h. Knicke und elastische Lagerung im betreffenden Knoten müssen berücksichtigt werden. In der Herleitung des Lastvektors $\underline{\bar{z}}_i^0$ wird entsprechend Gleichung (10.9) zuerst der Lastvektor $\underline{\tilde{z}}_i^0$ berechnet, der den Einfluß der Belastung auf das rechte Stabende des Elementes ⓘ berücksichtigt. Anschließend berechnen wir den Lastvektor $\underline{\bar{z}}_i^0$ nach Gleichung (10.17). Für den Lastfall einer linear veränderlichen Streckenlast (Bild 10.7 (a)) ist der Lastvektor

$$\underline{\tilde{z}}_i^0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \ell^4(p^r+4p^\ell)/(120EI_y) \\ -\ell^3(p^r+3p^\ell)/(24EI_y) \\ \hline 0 \\ -(p^r+p^\ell)\ell/2 \\ -(p^r+2p^\ell)\ell^2/6 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \hline 0 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\right] \tag{10.27}$$

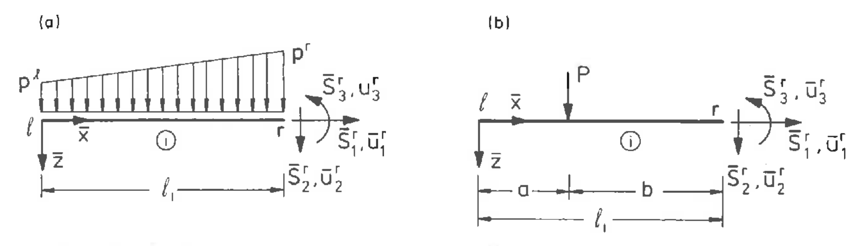


Bild 10.7 Streckenlast und Einzellast im Element

Mit den berechneten Hilfswerten a_1 bis a_4 wird $\underline{\bar{z}}_i^0$ mit $\underline{\bar{U}}_k$ nach Gleichung (10.15) berechnet:

$$\underline{\bar{z}}_i^0 = \left[\begin{array}{c} -a_1 \sin\alpha \\ a_1 \cos\alpha \\ a_2 \\ \hline a_3 \sin\alpha \\ -c_w a_1 - a_3 \cos\alpha \\ -c_\varphi a_2 - a_4 \end{array}\right] \qquad (10.28)$$

c_w und c_φ sind die Federsteifigkeiten nach Gleichung (10.24).

Für den ebenen Durchlaufträger ohne Knicke wird $\underline{\bar{z}}_i^0$ unter Vernachlässigung der Normalkraftverformungen zu:

$$\underline{\bar{z}}_i^0 = \left[\begin{array}{c} \ell^4 (p^r + 4p^\ell)/(120 EI_y) \\ -\ell^3 (p^r + 3p^\ell)/(24 EI_y) \\ \hline -c_w \ell^4 (p^r + 4p^\ell)/(120 EI_y) + (p^\ell + p^r)\ell/2 \\ c_\varphi \ell^3 (p^r + 3p^\ell)/(24 EI_y) + (2p^\ell + p^r)\ell^2/6 \end{array}\right] \qquad (10.29)$$

Für eine im Element (i) angreifende Einzellast (Bild 10.7 (b)) gilt:

$$\underline{\bar{z}}_i^0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ Pb^3/(6EI_y) \\ -Pb^2/(2EI_y) \\ \hline 0 \\ -P \\ -Pb \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \hline 0 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\right] \qquad (10.30)$$

Gleichung (10.28) ergibt den Lastvektor $\underline{\bar{z}}_i^0$.

Für den ebenen Durchlaufträger ohne Knicke wird $\underline{\bar{z}}_i^0$ unter

Vernachlässigung der Normalkraftverformungen zu:

$$\bar{z}_i^o = \begin{bmatrix} Pb^3/(6EI_y) \\ -Pb^2/(2EI_y) \\ \hline -c_w Pb^3/(6EI_y) + P \\ c_\varphi Pb^2/(2EI_y) + Pb \end{bmatrix} \qquad (10.31)$$

Dies sind die häufigsten Lastfälle. Die Lastvektoren für andere Lastfälle können mit den Gleichgewichtsbedingungen und dem Prinzip der virtuellen Arbeiten berechnet werden.
An einem elastisch gelagerten und einem starr gelagerten Durchlaufträger wird nun das Übertragungsverfahren erläutert.

Beispiel 10.1:
Der in Bild 10.8 abgebildete elastisch gelagerte Durchlaufträger wird unter Vernachlässigung von Normalkraftverformungen mit dem Übertragungsverfahren berechnet.

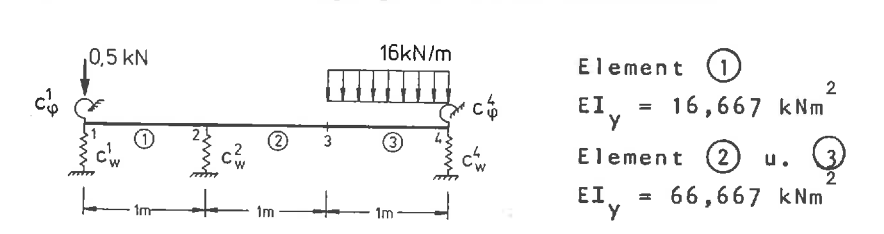


Bild 10.8 Elastisch gelagerter Durchlaufträger

Die Federsteifigkeiten sind wie folgt festgelegt

$$c_w^1 = 20 \text{ kN/m}, \quad c_\varphi^1 = 10 \text{ kNm}, \quad c_w^2 = 100 \text{ kN/m},$$
$$c_w^4 = 50 \text{ kN/m} \quad \text{und} \quad c_\varphi^4 = 50 \text{ kNm}.$$

Da weder Gelenke noch starre Lager im Tragwerk vorhanden sind, gibt es keine Sprunggrößen.
Nach Voraussetzung müssen Knotenlasten im Element angreifen. Wir berücksichtigen die Belastung am linken Stabende

des Elementes ① im Lastvektor $\underline{z}_1^0$.

Die Zustandsvektoren des Anfangs- und Endknotens sind entsprechend den Randbedingungen:

$$\underline{z}_1^\ell = \begin{bmatrix} \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_3^1 \\ \hline -20\bar{u}_2^1 \\ -10\bar{u}_3^1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{z}_4^\ell = \begin{bmatrix} \bar{u}_2^4 \\ \bar{u}_3^4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Übertragungsmatrizen der Elemente ① bis ③ und die Lastvektoren $\underline{z}_1^0$ und $\underline{z}_3^0$ werden mit Hilfe der Gleichungen (10.26), (10.29) und (10.31) besetzt:

$$\underline{U}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0{,}01 & 0{,}03 \\ 0 & 1 & -0{,}03 & -0{,}06 \\ \hline -100 & 100 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{U}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0{,}0025 & 0{,}0075 \\ 0 & 1 & -0{,}0075 & -0{,}0150 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underline{U}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0{,}0025 & 0{,}0075 \\ 0 & 1 & -0{,}0075 & -0{,}0150 \\ \hline -50 & 50 & 0{,}8750 & -0{,}3750 \\ 0 & -50 & 1{,}3750 & 1{,}7500 \end{array}\right] \quad \underline{z}_1^0 = \begin{bmatrix} 0{,}005 \\ -0{,}015 \\ \hline 0 \\ 0{,}500 \end{bmatrix} \quad \underline{z}_3^0 = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}04 \\ \hline 15{,}50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Mit SMIS kann man die Matrizenprodukte und die Matrizensummen durchführen. Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt:

```
LOAD    F1 = U1   N1 = 4   N2 = 4
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{U}_1$.

```
LOAD    F1 = U2   N1 = 4   N2 = 4
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{U}_2$.

```
LOAD    F1 = U3   N1 = 4   N2 = 4
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix $\underline{U}_3$.

```
LOAD    F1 = Z10   N1 = 4   N2 = 1
:
```

Es folgen die Elemente des Lastvektors $\bar{z}_1^0$.

```
LOAD    F1 = Z30   N1 = 4   N2 = 1
:
```

Es folgen die Elemente des Lastvektors $\bar{z}_3^0$.

```
MULT    F1 = U3    F2 = U2    F3 = U32
MULT    F1 = U32   F2 = U1    F3 = U321
```

Die Matrix U321 enthält die Elemente des Matrizenproduktes $\underline{U}_3\ \underline{U}_2\ \underline{U}_1$.

```
MULT    F1 = U32   F2 = Z10   F3 = Z0
ADD     F1 = Z0    F2 = Z30
```

Der Vektor Z0 enthält die Elemente des Lastvektors; er wird aus der Summe $\underline{U}_3\ \underline{U}_2\ \underline{\bar{z}}_1^0 + \underline{\bar{z}}_3^0$ gebildet.

```
PRINT   F1 = U321
PRINT   F1 = Z0
```

Mit der Übertragungsmatrix des Gesamtsystems U321 und dem Lastvektor Z0 des Gesamtragwerkes wird das zu lösende Gleichungssystem aufgestellt:

$$\underline{U}_3\ \underline{U}_2\ \underline{U}_1\ \underline{\bar{z}}_1^\ell + \underline{U}_3\ \underline{U}_2\ \underline{\bar{z}}_1^0 + \underline{\bar{z}}_3^0 = \underline{\bar{z}}_4^\ell \quad \text{oder}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0{,}1 & 0{,}12 \\ 3 & -2 & -0{,}06 & 0 \\ \hline -50 & 150 & -5 & -9 \\ -350 & 300 & 4 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_3^1 \\ \hline -20\bar{u}_2^1 \\ -10\bar{u}_3^1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0{,}05 \\ -0{,}03 \\ \hline -2{,}50 \\ 2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0{,}01 \\ -0{,}04 \\ \hline 15{,}5 \\ 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{u}_2^4 \\ \bar{u}_3^4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Mit den beiden letzten Zeilen des Gleichungssystems werden die unbekannten Anfangsverformungen bestimmt. Aus

$$50\ \bar{u}_2^1 + 240\ \bar{u}_3^1 + 13 = 0 \quad \text{und}$$

$$-430\ \bar{u}_2^1 + 350\ \bar{u}_3^1 + 12 = 0$$

ergibt sich:

$$\bar{u}_2^1 = -0{,}013836 \quad \text{und} \quad \bar{u}_3^1 = -0{,}051284\ .$$

Der Anfangsvektor der Zustandsgrößen ist damit

$$\underline{z}_1^{\ell} = \begin{bmatrix} -0,013836 \\ -0,051284 \\ \hline 0,276700 \\ 0,512840 \end{bmatrix}$$

Für den zweiten Berechnungsgang wird der Anfangsvektor der Zustandsgrößen $\underline{z}_1^{\ell}$ in SMIS eingelesen und die Zustandstandsgrößen der weiteren Elemente mit den folgenden SMIS-Befehlen ermittelt.

```
LOAD     F1 = Z1L   N1 = 4    N2 = 1
  :
```

Es folgen die Elemente des Vektors $\underline{z}_1^{\ell}$.

```
MULT     F1 = U1    F2 = Z1L   F3 = Z2L
ADD      F1 = Z2L   F2 = Z10
PRINT    F1 = Z2L
```

Die Zustandsgrößen $\underline{z}_2^{\ell}$ werden durch den Befehl PRINT ausgegeben.

```
MULT     F1 = U2    F2 = Z3L
PRINT    F1 = Z3L
```

Die Zustandsgrößen $\underline{z}_3^{\ell}$ werden durch den Befehl PRINT ausgegeben.

```
MULT     F1 = U3    F2 = Z4L
ADD      F1 = Z4L   F2 = Z30
PRINT    F1 = Z4L
```

Die Zustandsgrößen $\underline{z}_4^{\ell}$, d.h. die Zustandsgrößen rechts des Knotens 4 werden ausgegeben. Es ergibt sich zusammengefaßt:

$$\underline{z}_2^{\ell} = \begin{bmatrix} 0,0606 \\ -0,1054 \\ \hline -5,2833 \\ 1,2896 \end{bmatrix} \quad \underline{z}_3^{\ell} = \begin{bmatrix} 0,1624 \\ -0,0851 \\ \hline -5,2833 \\ -3,9938 \end{bmatrix} \quad \underline{z}_4^{\ell} = \begin{bmatrix} 0,2143 \\ -0,0255 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimension [kN, kNm, m]

In Bild 10.9 sind die Biegelinie und die Querkraft- und Momenten-Zustandslinie graphisch dargestellt.

Die Auflagerreaktionen am Knoten 4 werden entweder über das äußere Gleichgewicht oder aus den Federbedingungen $V_4 = c_W \overset{4}{\bar{u}}_2$ und $M_4 = c_\varphi \overset{4}{\bar{u}}_3$ ermittelt.

Es ergibt sich $V_4 = -10{,}7167$ kN und $M_4 = 1{,}2771$ kNm.

Bei der Querkraftlinie ist die Einzellast im Knoten 1 zu berücksichtigen.

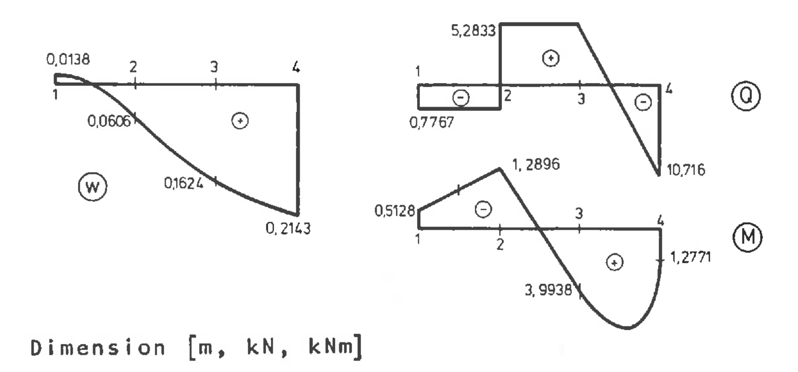


Bild 10.9 Biegelinie, Querkraft- und Momenten-Zustandslinie

Wie schon erwähnt, ist das Übertragungsverfahren ursprünglich für die systematische Berechnung mit Tischrechenmaschinen entwickelt worden. Falk /18/ schlägt dazu ein spezielles Verfahren für die Matrizenmultiplikationen vor, das im Anhang A1 erläutert wird.

Das Beispiel wird mit den oben angegebenen Übertragungsmatrizen nach dem Falk'schen Schema berechnet (siehe Seite 241).

Als Ergebnis erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\text{(i)} \quad -3\,\overset{1}{\bar{u}}_2 - 2{,}2\,\overset{1}{\bar{u}}_3 - 0{,}06 = \overset{4}{\bar{u}}_2$$

$$\text{(ii)} \quad 4{,}2\,\overset{1}{\bar{u}}_2 - 2\,\overset{1}{\bar{u}}_3 - 0{,}07 = \overset{4}{\bar{u}}_3$$

$$\text{(iv)} \quad 50\,\overset{1}{\bar{u}}_2 + 240\,\overset{1}{\bar{u}}_3 - 13{,}0 = 0$$

$$\text{(v)} \quad -430\,\overset{1}{\bar{u}}_2 + 350\,\overset{1}{\bar{u}}_3 + 12{,}0 = 0\ .$$

	1. Berechnungsgang							2. Berechnungsgang	
					$\overline{u}_2^1$	$\overline{u}_3^1$	$\underline{\overline{z}}_i^0$		
					1	0	0		-0,0138
					0	1	0	: $\underline{\overline{z}}_1^\ell$ =	-0,0513
					-20	0	0		0,2767
					0	-10	0		-0,5128
	1	-1	0,01	0,03	0,8	-1,3	0,005		0,0606
$\underline{U}_1$:	0	1	-0,03	-0,06	0,6	1,6	-0,015	: $\underline{\overline{z}}_2^\ell$ =	-0,1054
	-100	100	0	-3	-100	130	0		-5,2833
	0	0	1	1	-20	-10	0,5		1,2896
	1	-1	0,0025	0,0075	-0,2	-2,65	0,02375		0,1624
$\underline{U}_2$:	0	1	-0,0075	-0,0150	1,65	0,775	-0,0225	: $\underline{\overline{z}}_3^\ell$ =	-0,0851
	0	0	1	0	-100	130	0		-5,2833
	0	0	1	1	-120	120	0,5		-3,9938
	1	-1	0,0025	0,0075	-3	-2,2	0,01+0,05 = 0,06		0,2143
$\underline{U}_3$:	0	1	-0,0075	-0,0150	4,2	-2	-0,04-0,03 = -0,07	: $\underline{\overline{z}}_4^\ell$ =	-0,0255
	-50	50	0,8750	-0,3750	50	240	15,50-2,50 = 13,00		0
	0	-50	1,3750	1,7500	-430	350	10,00+2,00 = 12,00		0

Aus den Gleichungen (iv) und (v) (siehe Seite 240) können die unbekannten Anfangsverformungen $\bar{u}_2^1$ und $\bar{u}_3^1$ berechnet werden:

$$\bar{u}_2^1 = -0{,}013836$$

$$\bar{u}_3^1 = -0{,}051284 \; .$$

Im zweiten Berechnungsgang benutzt man das Falk'sche Schema des ersten Berechnungsganges, führt jedoch die nun möglichen Multiplikationen mit $\bar{u}_2^1$ und $\bar{u}_3^1$ durch. Es ergibt sich $\underline{\bar{z}}_1^\ell$ bis $\underline{\bar{z}}_4^\ell$ (siehe Seite 241).

Beispiel 10.2:

Der in Bild 10.10 abgebildete Zweifeldträger wird nach dem Übertragungsverfahren unter Vernachlässigung der Normalkraftverformungen berechnet. Der Einfluß von Sprunggrößen (hier Auflagerreaktionen) wird speziell erläutert.

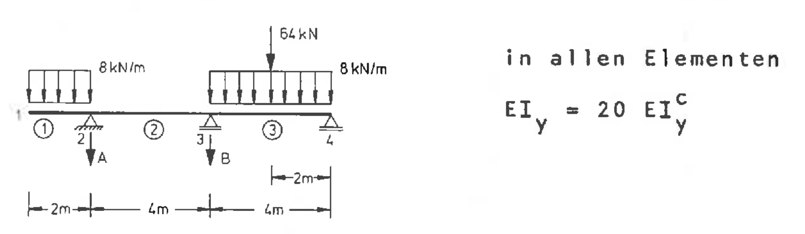


Bild 10.10 Zweifeldträger

Zur Vereinfachung wird $EI_y^c = 1$ gesetzt. Damit werden EI_y^c-fache Verformungen berechnet. Wir berücksichtigen das Auflager am Knoten 4 im Endvektor $\underline{\bar{z}}_4^\ell$. Die Zustandsvektoren des Anfangs- und Endknotens sind:

$$\underline{\bar{z}}_1^\ell = \begin{bmatrix} \bar{u}_2^1 \\ \bar{u}_3^1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\bar{z}}_4^\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_3^4 \\ \hline \bar{S}_2^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zu den unbekannten Zustandsgrößen $\bar{u}_2^1$, $\bar{u}_3^1$, $\bar{u}_3^4$ und $\bar{S}_2^4$ kommen bei starr gelagerten Durchlaufträgern die Lagerreaktionen im Innern als unbekannte Sprunggrößen hinzu, hier die La-

gerreaktionen A und B (Bild 10.10). Gleichzeitig gibt es für jede Lagerreaktion eine zusätzliche Bestimmungsgleichung. Hier sind dies die Bedingungen

$$\bar{u}_2^2 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2^3 = 0 \; .$$

Die Zustandsvektoren der Sprunggrößen $\tilde{\underline{z}}_2$ und $\tilde{\underline{z}}_3$ sind entsprechend der Lagerung besetzt:

$$\tilde{\underline{z}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{bmatrix} A \qquad \tilde{\underline{z}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{bmatrix} B$$

Die Übertragungsmatrizen der Elemente ① bis ③ und die Lastvektoren $\bar{\underline{z}}_1^0$ und $\bar{\underline{z}}_3^0$ ergeben sich zu:

$$\underline{U}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0{,}0667 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{U}_2 \equiv \underline{U}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 0{,}5333 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{\underline{z}}_1^0 = \begin{bmatrix} 0{,}2667 \\ -0{,}5333 \\ \hline 16 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \bar{\underline{z}}_3^0 = \begin{bmatrix} 4{,}2667 + 4{,}2667 \\ -4{,}2667 - 6{,}4 \\ \hline 32 + 64 \\ 64 + 128 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 8{,}5334 \\ -10{,}6667 \\ \hline 96 \\ 192 \end{bmatrix}$$

Mit SMIS können die erforderlichen Matrizenprodukte ausgeführt werden. Die Befehle sind analog zu denen von Beispiel 10.1.

Für die Sprunggrößen (Lagerreaktionen A und B) sind zusätzlich die Matrizenprodukte $\underline{U}_3\,\underline{U}_2\,\tilde{\underline{z}}_2$ und $\underline{U}_3\,\tilde{\underline{z}}_3$ zu bilden.

Das zu lösende Gleichungssystem hat die Form (vgl. (10.19)):

$$\underline{U}_3\,\underline{U}_2\,\underline{U}_1\,\bar{\underline{z}}_1^{\ell} + \underline{U}_3\,\underline{U}_2\,\tilde{\underline{z}}_2 + \underline{U}_3\,\tilde{\underline{z}}_3 + \underline{U}_3\,\underline{U}_2\,\bar{\underline{z}}_1^0 + \bar{\underline{z}}_3^0 = \bar{\underline{z}}_4^{\ell} \; .$$

Das Beispiel wird hier mit den oben angegebenen Übertragungsmatrizen nach dem Falk'schen Schema berechnet (siehe Seite 245).

Als Ergebnis erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\text{(i)}\quad \bar{u}_2^1 - 10\,\bar{u}_3^1 + 4{,}2666\,A + 0{,}5333\,B + 106{,}9321 = 0$$

$$\text{(ii)}\quad 8\,A + 4\,B + 336 = 0$$

$$\text{(iv)}\quad \bar{u}_2^1 - 2\,\bar{u}_3^1 + 0{,}2667 = 0$$

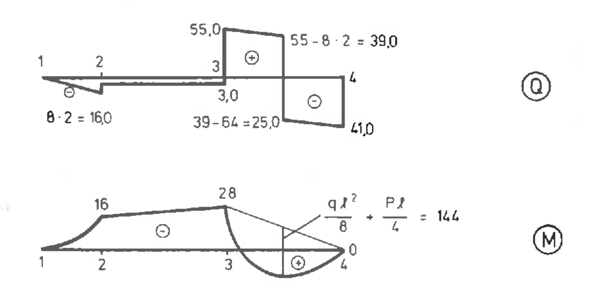
$$\text{(v)}\quad \bar{u}_2^1 - 6\,\bar{u}_3^1 + 0{,}5333\,A + 17{,}3372 = 0\,.$$

Die Auflösung ergibt:

$$\bar{u}_2^1 = 4{,}8\,,\quad \bar{u}_3^1 = 2{,}5333\,,\quad A = -13 \quad \text{und} \quad B = -58\,.$$

In einem zweiten Berechnungsgang werden die Zustandsgrößen aller Elemente analog zu Beispiel 10.1 unter besonderer Berücksichtigung der Lagerreaktionen gebildet. Es ergeben sich $\underline{\bar{z}}_1^\ell$ bis $\underline{\bar{z}}_4^\ell$ (siehe Seite 245).

In Bild 10.11 sind Querkraft- und Momentenzustandslinie graphisch dargestellt. Zwischenwerte werden mit den Gleichgewichtsbedingungen am Element berechnet.



Dimension [kN, kNm]

Bild 10.11 Querkraft- und Momentenzustandslinie

1. Berechnungsgang

					$\bar{u}_2^1$	$\bar{u}_3^1$	A	B	$\bar{z}_i^0$	
					1	0	0	0	0	
					0	1	0	0	0	
					0	0	0	0	0	
					0	0	0	0	0	
$\underline{U}_1$:	1	-2	0,0667	0,1	1	-2	0 + 0	0	0 + 0,2667	←(3)
	0	1	-0,1	-0,1	0	1	0 + 0	0	0 - 0,5333	
	0	0	1	0	0	0	0 + 1	0	0 + 16	
	0	0	2	1	0	0	0 + 0	0	0 + 16	
$\underline{U}_2$:	1	-4	0,5333	0,4	1	-6	0,5333	0 + 0	17,3327	←(4)
	0	1	-0,4	-0,2	0	1	-0,4	0 + 0	-10,1333	
	0	0	1	0	0	0	1	0 + 1	16	
	0	0	4	1	0	0	4	0 + 0	80	
$\underline{U}_3$:	1	-4	0,5333	0,4	1	-10	4,2666	0,5333	98,3987 + 8,5334 = 106,9321	←(1)
	0	1	-0,4	-0,2	0	1	-1,6	-0,4	-32,5333 - 10,6667 = -43,2	
	0	0	1	0	0	0	1	1	16 + 96 = 112	
	0	0	4	1	0	0	8	4	144 + 192 = 336	←(2)

2. Berechnungsgang

$$: \bar{\underline{z}}_1^{\ell} = \begin{bmatrix} 4,8 \\ 2,5333 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

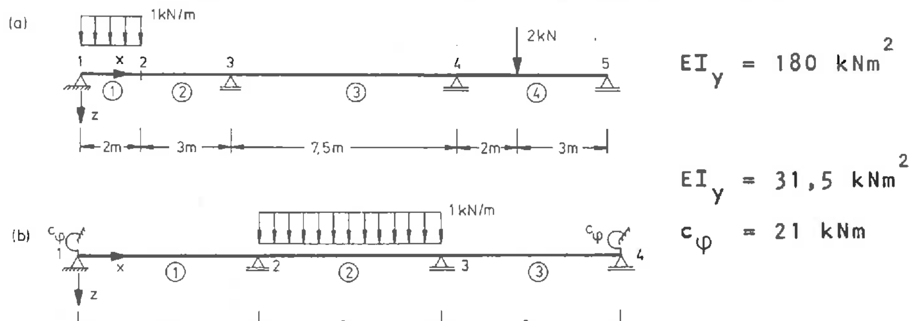
$$: \bar{\underline{z}}_2^{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$: \bar{\underline{z}}_3^{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,4 \\ -55 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$: \bar{\underline{z}}_4^{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,3333 \\ 41 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgaben:

10.1 Für die abgebildeten Durchlaufträger bestimme man die Zustandsgrößen nach dem Übertragungsverfahren.



10.2 Man überlege sich anhand von Kapitel 8 den Berechnungsgang für die Ermittlung von Einflußlinien nach dem Übertragungsverfahren. Man berechne die Einflußlinie für die Verdrehung und für das Moment am Knoten 2 bei Aufgabe 10.1 (a).

11 Iterative Verfahren der linearen Statik

In der klassischen Baustatik haben die iterativen Verfahren von Cross /13/ und Kani /33/ für die Berechnung ebener Stabwerke große Bedeutung und werden auch heute noch häufig bei der Handrechnung verwendet. Diese Verfahren lösen die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens iterativ.

Für die Matrizenmethoden der Statik haben die *iterativen* Lösungsverfahren linearer Probleme im Vergleich zu den *direkten* nur geringe Bedeutung.
Ein wesentlicher Grund dafür ist der hohe Rechenaufwand bei der Berechnung mehrerer Lastfälle: Für jeden Lastfall ist eine vollständige Neuberechnnug erforderlich. Bei der direkten Lösung hingegen muß die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix nur einmal durchgeführt werden, und zusätzliche Lastfälle erfordern nur das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen (siehe Anhang A2.1.4). In Sonderfällen, wie z.B. bei unregelmäßig schwach besetzter Koeffizientenmatrix und wenigen rechten Seiten (Lastfälle), können iterative Verfahren in Betracht gezogen werden.

11.1 Das Verfahren von Gauß-Seidel

Es gibt eine Reihe von iterativen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Eines der bekanntesten ist das Verfahren von Gauß-Seidel (/95/, Seite 338).
Für Gleichungssysteme mit gut konditionierter Koeffizientenmatrix (Anhang A1.8), deren Diagonalelemente dominant sind und untereinander gleiche Größenordnung haben, zeigt das Verfahren eine gute Konvergenz.
Die Steifigkeitsmatrix nach dem Drehwinkelverfahren (Abschnitt 6.4) hat bei unverschieblichen Systemen diese Eigenschaften.

Im folgenden zeigen wir das Gauß-Seidel'sche Iterationsverfahren anhand der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens (6.6)

$$\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R}\ .$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}_{n\times n}$ ist positiv definit, d.h. für die Hauptdiagonalelemente gilt:

$$K_{ii} > 0\ .$$

Die Iterationsschritte kennzeichnen wir durch den Zeiger ν. Am Anfang der Iteration ist $\nu = 0$ und $\underline{r}^{\nu}$ ein geschätzter Startvektor (z.B. der Nullvektor).

In jedem Iterationsschritt $\nu = 0, 1, \ldots$ erhält man nach Gauß-Seidel für jede Knotenverformung r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$r_i^{\nu+1} = \frac{1}{K_{ii}}\,(R_i - \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,\tilde{r}_j^{\nu}) \qquad (11.1)$$

$$\text{mit} \qquad \tilde{r}_j^{\nu} = \begin{Bmatrix} r_j^{\nu+1} & & j < i \\ 0 & \text{für} & j = i \\ r_j^{\nu} & & j > i \end{Bmatrix} .$$

Das Iterationsende ist erreicht, wenn die Norm (Anhang A1.3) des Differenzvektors zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte kleiner ist als eine vorgegebene Fehlerschranke ε:

$$\| \underline{r}^{\nu+1} - \underline{r}^{\nu} \| < \varepsilon\ . \qquad (11.2)$$

Man bezeichnet die Iteration nach (11.1) als Einzelschrittverfahren, da die einzelnen neuberechneten Komponenten $r_i^{\nu+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ bei der Berechnung der folgenden Komponente $r_{j+1}^{\nu+1}$ verwendet werden.

11.2 Das Verfahren von Kani

Das Verfahren von G. Kani /33/ ist eines der bekanntesten Iterationsverfahren für die Berechnung von Stabtragwerken mit überwiegender Biegebeanspruchung. Es wird auch als *Momentenausgleichsverfahren* bezeichnet.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Darstellung für ebene, unverschiebliche Stabtragwerke und verweisen bezüglich der Erweiterungen auf verschiebliche Stabtragwerke auf die umfangreiche Literatur (so z.B. Hirschfeld /28/).
Die Grundlage der iterativen Berechnung nach Kani ist das Gauß-Seidel'sche Iterationsverfahren. Die Iteration wird in Form eines Momentenausgleichs an den Knoten des Stabtragwerkes durchgeführt. Dieser Ausgleich erfolgt üblicherweise anhand einer Systemskizze mit Eintragung der Momente.

Für die Ableitung des Iterationsverfahrens sind einige grundsätzliche Erklärungen erforderlich:
Entgegen der Vorzeichenfestlegung, wie sie bei dem Verfahren von Kani gebräuchlich ist, behalten wir hier die Vorzeichenregeln des Weggrößenverfahrens bei (Bild 11.1):

Stabendmomente sind positiv im Uhrzeigergegensinn.

Die Stabelemente, aus welchen sich ein unverschiebliches, ebenes Stabtragwerk zusammensetzt, sind in Bild 11.1 dargestellt. Es können nur Stabelemente ohne Gelenk an den beiden Stabenden (a) oder solche mit einem Gelenk an einem der beiden Stabenden (b) auftreten.

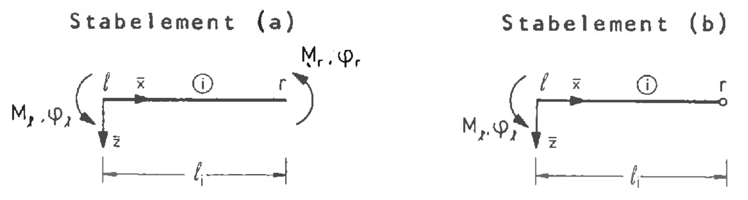


Bild 11.1 Stabelemente für das Verfahren von Kani

Die Stabendmomente werden mit M_ℓ und M_r bezeichnet; die zugehörigen Stabenddrehwinkel sind φ_ℓ und φ_r (Bild 11.1).
Für Stabelemente ohne Gelenk erhält man mit (6.24) die folgende Steifigkeitsbeziehung (Stabelement (a) nach Bild 11.1):

$$\begin{bmatrix} M_\ell \\ M_r \end{bmatrix} = \frac{2EI_y}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_\ell \\ \varphi_r \end{bmatrix} \qquad (11.3)$$

Für ein Element mit einem *Gelenk im Knoten r*, also mit dem Stabendmoment $M_r = 0$, ergibt sich aus (11.3):

$$\varphi_r = -1/2\ \varphi_\ell$$

$$\text{und} \qquad M_\ell = \frac{3EI_y}{\ell}\ \varphi_\ell\ . \qquad (11.4)$$

Damit sind die Elementsteifigkeiten der Stabelemente (a) und (b) bekannt.

Wir betrachten nun das Stabelement als Teil des Gesamttragwerkes und stellen die *Verträglichkeit* von Element- und Knotenverdrehungen dar.

In Knotenpunkten, in welchen *alle Stäbe* gelenkig angeschlossen sind, kann keine Knotenverdrehung auftreten (Definition 4.2). In Knotenpunkten mit starrer Einspannung ist der Knotendrehwinkel Null.

In allen übrigen Knotenpunkten tritt ein Knotendrehwinkel auf: Er ist positiv im Uhrzeigergegensinn und wird mit Θ_i bezeichnet, wobei i die Knotennummer ist (Bild 11.2).
Zwischen den Stabendverdrehungen und den Knotenverdrehungen besteht die folgende

Verträglichkeitsbedingung:
In einem Knoten mit biegesteif angeschlossenen Stäben sind die Stabenddrehwinkel der biegesteif angeschlossenen Stäbe gleich dem Knotendrehwinkel.

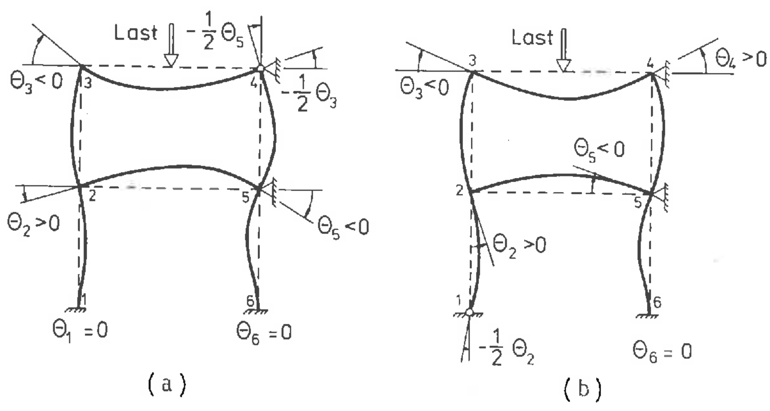


Bild 11.2 Kennzeichnung der Knotenpunkte und Knotendrehwinkel

Damit können die Steifigkeitsbeziehungen (11.3) und (11.4) durch die Knotenverdrehungen ausgedrückt werden.
Die Kennzeichnung eines Stabelementes erfolgt hier durch Angabe seiner Knotennummern. Wir weichen damit von der bisherigen Regelung, wonach der obere Zeiger die Elementnummer darstellt, ab.

Für ein Stabelement mit den Knoten i und j gilt im *Knoten i:*

$$M_i^j = k_{ii}^j \, \Theta_i + k_{ij}^j \, \Theta_j \, . \qquad (11.5)$$

Der obere Zeiger bezeichnet den abliegenden Knoten (Bild 11.3). Die Steifigkeitskoeffizienten ergeben sich nach (11.3) und (11.4). Man erhält für
biegesteifen Anschluß in i und j:

$$k_{ii}^j = \frac{4EI_y}{\ell}$$

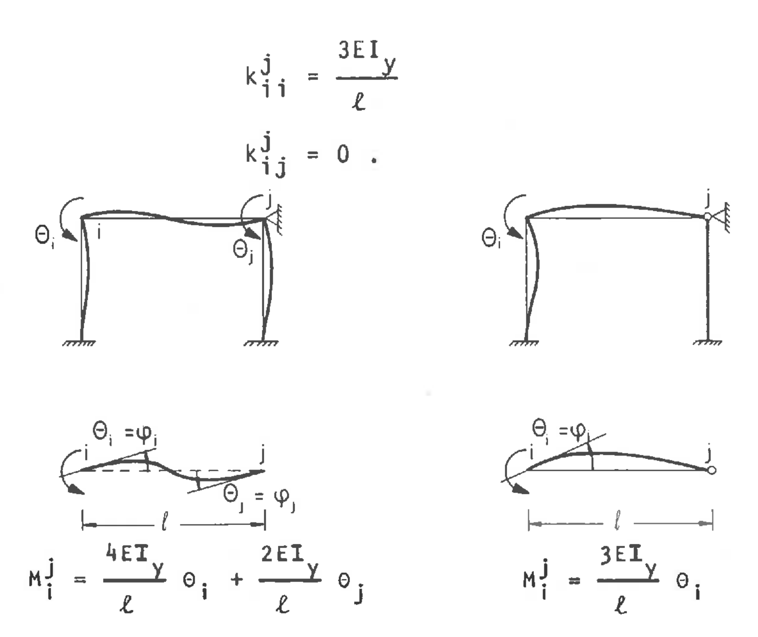
$$k_{ij}^j = \frac{2EI_y}{\ell}$$

und für

biegesteifen Anschluß in i und Gelenk in j:

$$k_{ii}^{j} = \frac{3EI_y}{\ell}$$

$$k_{ij}^{j} = 0 \ .$$



$$M_i^j = \frac{4EI_y}{\ell}\,\Theta_i + \frac{2EI_y}{\ell}\,\Theta_j \qquad\qquad M_i^j = \frac{3EI_y}{\ell}\,\Theta_i$$

Bild 11.3 Stabendmomente und Knotendrehwinkel

Wir fassen nun die Knotennummern aller Knoten mit mindestens zwei biegesteifen Stabanschlüssen und unbekanntem Knotendrehwinkel in der *Indexmenge* I_Θ zusammen.
Für das Stabtragwerk (a) in Bild 11.2 ist

$$I_\Theta = (2,\ 3,\ 5)$$

und für das Stabtragwerk (b):

$$I_\Theta = (2,\ 3,\ 4,\ 5)\ .$$

Für jeden Knoten $i \in I_\Theta$ bilden wir eine weitere Indexmenge I_i mit den "abliegenden" Knotennummern aller in i biegesteif angeschlossenen Stäbe.
Für den Knoten 2 in Bild 11.2, System (a) und (b) ist z.B.

$$I_2 = (1,\ 3,\ 5)\ ;$$

für den Knoten 3 ist:

$$I_3 = (2, 4) .$$

Am Knoten i kann das Gleichgewicht für die mit der Indexmenge I_i erfaßten Stabelemente aufgestellt werden.

Die Belastung wird als in den Knotenpunkten konzentriert angenommen. Eine verteilte Belastung in einem Stab i-j wird (siehe Abschnitt 7.1) über die zugehörigen Stabendmomente M^j_{Ri} und M^i_{Rj} (Tafel 7.1) für starre Endeinspannungen als Ersatzknotenmomente erfaßt. Mit Ersatzknotenmomenten können auch Temperaturbelastungen und Paßungenauigkeiten berücksichtigt werden.

An einem Knoten i ist das Ersatzknotenmoment (Bild 11.4):

$$M_{Ri} = - \sum_{j \in I_i} M^j_{Ri} . \tag{11.6}$$

Knotenmoment M_i und Ersatzknotenmoment M_{Ri} fassen wir zum äußeren Moment $\overline{M}_i$ zusammen:

$$\overline{M}_i = M_i + M_{Ri} . \tag{11.7}$$

Für einen Knoten $i \in I_\Theta$ muß die Summe der inneren Momente (Stabendmomente) gleich dem äußeren Moment sein (*Gleichgewichtsbedingung*):

$$\sum_{j \in I_i} M^j_i = \overline{M}_i . \tag{11.8}$$

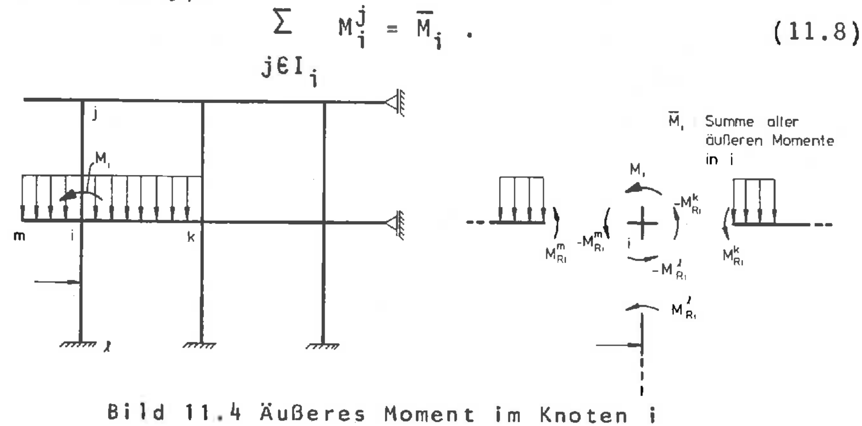
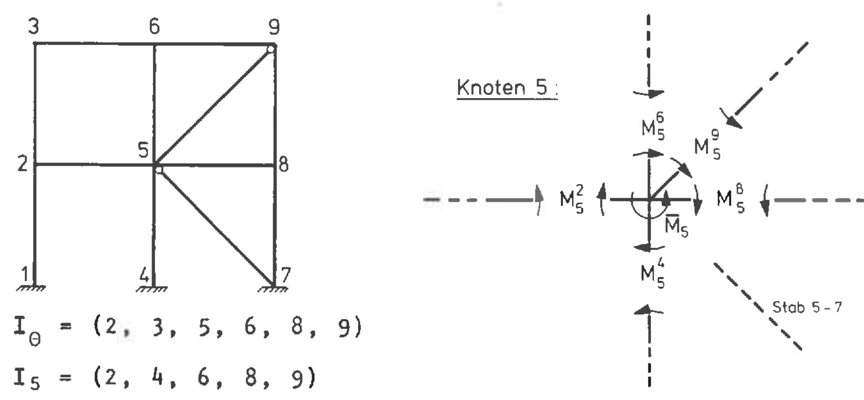


Bild 11.4 Äußeres Moment im Knoten i

Dieser Zusammenhang ist in Bild 11.5 durch eine Skizze veranschaulicht.



$$\sum_{j \in I_5} M_5^j = \overline{M}_5 \quad \text{(Momentengleichgewicht 5)}$$

Bild 11.5 Gleichgewicht der Momente in einem Knoten

Durch Einsetzen von (11.5) in (11.8) erhält man:

$$\sum_{j \in I_i} (k_{ii}^j \, \Theta_i + k_{ij}^j \, \Theta_j) = \overline{M}_i \tag{11.9}$$

$$\text{für alle } i \in I_\Theta \, .$$

Für n unbekannte Knotendrehwinkel Θ_i ergibt dies genau n Gleichungen.

Gleichung (11.9) ist eine andere Art, die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens darzustellen. Es werden nur Knotendrehwinkel als Unbekannte betrachtet ($\underline{r} \equiv \underline{\Theta}$), und es wird nur die Bildungsvorschrift für die Elemente einer Zeile der Gesamtsteifigkeitsmatrix angegeben.

Wir kommen nun zur Darstellung der iterativen Lösung von (11.9).

Zur Abkürzung der Schreibweise wird in (11.9) gesetzt:

$$K_{ii} = \sum_{j \in I_i} k_{ii}^j \, . \tag{11.10}$$

K_{ii} ist ein Element der Hauptdiagonale der Steifigkeitsmatrix. Es ist die Summe der Steifigkeitskoeffizienten k_{ii}^{j} aller am Knoten i biegesteif angeschlossenen Stabelemente. Man erhält damit:

$$K_{ii}\,\Theta_i + \sum_{j\in I_i} k_{ij}^{j}\,\Theta_j = \overline{M}_i \,. \qquad (11.11)$$

Wir zeigen nun zunächst wie dieses Gleichungssystem mit dem Verfahren von Gauß-Seidel gelöst wird und kennzeichnen hierzu die Knotendrehwinkel durch Angabe des Iterationsschrittes ν:

Θ_i^{ν} ist der Knotendrehwinkel Θ_i im ν-ten Iterationsschritt.

Durch Vergleich mit der Iterationsvorschrift des Gauß-Seidel Verfahrens erkennt man, daß sich $\Theta_i^{\nu+1}$ im $(\nu+1)$-ten Iterationsschritt berechnen läßt aus:

$$\Theta_i^{\nu+1} = \frac{1}{K_{ii}}\,(\overline{M}_i - \sum_{j\in I_i} k_{ij}^{j}\,\tilde{\Theta}_j^{\nu}) \,. \qquad (11.12)$$

Hierbei ist

$\tilde{\Theta}_j^{\nu} = \Theta_j^{\nu+1}$ wenn $\Theta_j^{\nu+1}$ bekannt ist und sonst

$\tilde{\Theta}_j^{\nu} = \Theta_j^{\nu}$.

Dies entspricht genau dem in Abschnitt 11.1 beschriebenen Verfahren (Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel). Die Reihenfolge der Iteration stimmt jedoch hier nicht unbedingt mit der Reihenfolge der Knotennumerierung überein.

Bei dem Iterationsverfahren von Kani wird nicht über die Knotendrehwinkel Θ_i iteriert; es werden Momentenanteile als Iterationsvariable eingeführt. Diese Momentenanteile werden festgelegt durch:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ij} &= \overline{k}_{ii}^{j}\,\Theta_i \\ \overline{M}_{ji} &= \overline{k}_{jj}^{i}\,\Theta_j \,. \end{aligned} \qquad (11.13)$$

Hierbei sind:

$$\bar{k}^j_{ii} = 1/2\ k^j_{ii} = \begin{cases} \dfrac{2EI_y}{\ell} & \text{biegesteif in j} \\ \dfrac{1{,}5EI_y}{\ell} & \text{Gelenk in j} \end{cases}$$

$$\bar{k}^i_{jj} \equiv k^j_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2EI_y}{\ell} & \text{biegesteif in j} \\ 0 & \text{Gelenk in j} \end{cases} \tag{11.14}$$

Durch Vergleich mit (11.5) ergibt sich:

$$M^j_i = 2\ \bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}\ . \tag{11.15}$$

Wir ersetzen K_{ii} mit (11.10) und (11.14) durch

$$2\ \bar{K}_{ii} \equiv K_{ii} = 2 \sum_{j \in I_i} \bar{k}^j_{ii}$$

und multiplizieren (11.11) mit $\bar{k}^j_{ii}/K_{ii}$. Man erhält:

$$\bar{k}^j_{ii}\ \Theta_i = \frac{\bar{k}^j_{ii}}{2\ \bar{K}_{ii}} (\bar{M}_i - \sum_{j \in I_i} \bar{k}^i_{jj}\ \Theta_j)\ .$$

Durch Einsetzen von (11.13) folgt:

$$\bar{M}_{ij} = \frac{\bar{k}^j_{ii}}{2\ \bar{K}_{ii}} (\bar{M}_i - \sum_{j \in I_i} \bar{M}_{ji})\ .$$

Für das Verfahren von Kani führt man üblicherweise einen *Drehungsfaktor* für die Elemente ein:

$$D^j_i = - \frac{\bar{k}^j_{ii}}{2\ \bar{K}_{ii}} \equiv - \frac{\bar{k}^j_{ii}}{2 \sum\limits_{j \in I_i} \bar{k}^j_{ii}}\ . \tag{11.16}$$

Damit erhält man die Iterationsgleichung für das Verfahren

von Kani:

$$\bar{M}_{ij}^{\nu+1} = D_i^j \left(-\bar{M}_i + \sum_{j \in I_i} \tilde{M}_{ji}^{\nu}\right) \qquad (11.17)$$

mit $\tilde{M}_{ji}^{\nu} = \bar{M}_{ji}^{\nu+1}$ wenn $\bar{M}_{ji}^{\nu+1}$ bekannt ist und sonst

$$\tilde{M}_{ji}^{\nu} = \bar{M}_{ji}^{\nu} .$$

Das *Iterationsende* ist erreicht, wenn für alle Stäbe i-j gilt:

$$|\bar{M}_{ij}^{\nu+1} - \bar{M}_{ij}^{\nu}| < \varepsilon \text{ (Fehlerschranke)} .$$

Die endgültigen Stabendmomente erhält man aus Gleichung (11.15): Wenn ein Stab belastet ist, so ergibt sich das endgültige Stabendmoment als Summe von dem Stabendmoment infolge Knoten- und Ersatzknotenlasten und dem Stabendmoment infolge Belastung im Element für homogene Randbedingungen der Verformungen:

$$M_i^j = 2\,\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji} + M_{Ri}^j . \qquad (11.18)$$

Mit vertauschten Indizes gilt diese Gleichung bei Stabelementen ohne Gelenk auch für das Moment M_j^i. Bei Elementen mit Gelenk am Knoten j ist M_j^i wegen des Gelenkes Null.

Um die Berechnung möglichst übersichtlich zu gestalten, führt man einige Vereinbarungen ein:

(a) Die Steifigkeit EI_y wird durch ein Steifigkeitsverhältnis $EI_y/(EI_y^c)$ ersetzt.

(b) Die Steifigkeit (EI_y^c) wird als Einheit betrachtet und bei der Berechnung der Steifigkeiten nach (11.14) nicht berücksichtigt.

(c) Die Steifigkeiten werden in einer Tabelle für jedes Element dargestellt.

(d) Die Drehungsfaktoren werden ebenfalls in einer Tabelle für jedes Element an jedem Knoten ermittelt. Nach Gleichung (11.16) muß die Summe aller Drehungsfaktoren an einem Knoten -0,5 sein (Kontrolle).

(e) Man fertigt eine Ausgleichsskizze an, in der die Knoten durch "Doppelkreise" mit Knotennummer, Knotenmoment und Drehungsfaktoren dargestellt werden (Bild 11.6).
(f) Die Stabendmomente nach Gleichung (11.18) werden in einer Tabelle elementweise ermittelt.

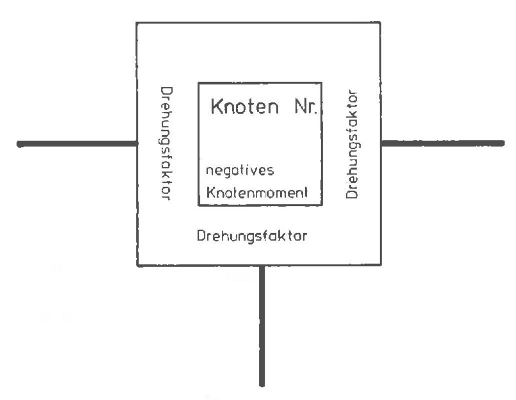


Bild 11.6 Knoten einer Ausgleichsskizze mit Knotennummer, Knotenmoment und Drehungsfaktoren der angeschlossenen Elemente

Die Berechnung eines ebenen unverschieblichen Stabtragwerkes nach dem Verfahren von Kani ist damit vollständig beschrieben. Einen Überblick über die erforderlichen Einzelschritte gibt die folgende

Zusammenfassung der Berechnung nach dem Verfahren von Kani

(1) Berechnung der Ersatzknotenmomente für verteilte Belastung nach Abschnitt 7.1 und Bildung der Knotenmomente;
(2) Berechnung der Steifigkeitszahlen und Drehungsfaktoren und tabellarische Darstellung;
(3) Anfertigung einer Ausgleichsskizze und Eintragung der Knotennummern, Drehungsfaktoren und negativen Knotenmomente (wegen Gleichung (11.17)) entsprechend Bild 11.6.

(4) Beginn des Momentenausgleichs am Knoten mit dem betragsgrößten Knotenmoment (zu Beginn sind alle Momentenanteile Null).

(5) Iteration - Momentenausgleich für alle Knoten nach Gleichung (11.17) in einer gewählten Reihenfolge. Die Summe aus abliegenden Momentenanteilen und Knotenmoment des betrachteten Knotens multipliziert mit den Drehungsfaktoren der einzelnen angeschlossenen Elemente ergibt neue Momentenanteile der betreffenden Elemente am betrachteten Knoten.

(6) Iterationsende: Die Änderung der Momentenanteile ist kleiner als eine Fehlerschranke ε.

(7) Tabellarische Ermittlung der Stabendmomente als Summe von Momentenanteilen und Ersatzknotenmoment nach Gleichung (11.18).

Im folgenden wird das Verfahren von Kani an zwei Beispielen erläutert (Bild 11.7 und 11.11).

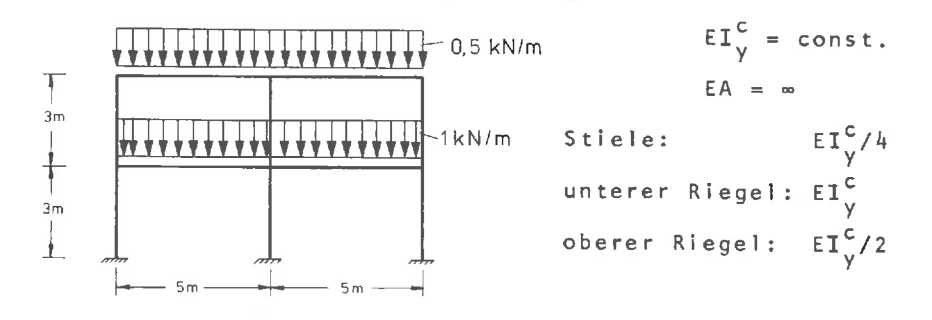


Bild 11.7 System und Belastung

Beispiel 11.1:

Bei dem in Bild 11.7 dargestellten unverschieblichen Rahmen wird das Belastungsumordnungsverfahren angewendet (Bild 11.8 (a)). Nach Abschnitt 7.1 werden die Ersatzknotenlasten ermittelt (Bild 11.8 (b)). Die nur auf Normalkraft beanspruchten Stäbe werden entfernt (Bild 11.8 (c)).

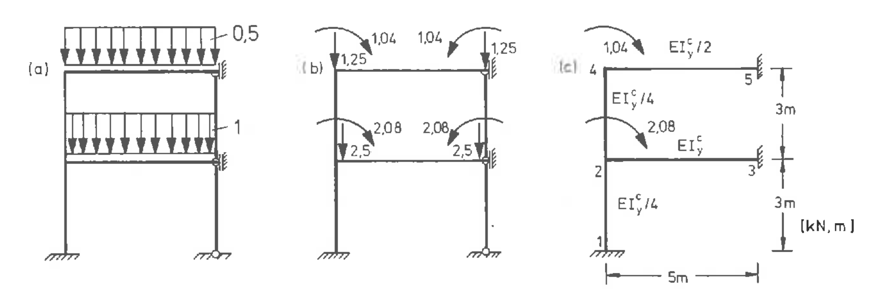


Bild 11.8 Entwicklung des zu berechnenden Systems

Für die Ersatzknotenmomente ergibt sich nach Tafel 7.1 und Gleichung (11.6):

$$\overline{M}_2 \equiv M_{R2} \equiv -M_{R2}^{3} = -q\ell^2/12 \equiv -2{,}0833 \text{ kNm} \;; \quad M_{R3}^{2} = -M_{R2}^{3} \;;$$

$$\overline{M}_4 \equiv M_{R4} \equiv -M_{R4}^{5} = -q\ell^2/12 \equiv -1{,}0417 \text{ kNm} \;; \quad M_{R5}^{4} = -M_{R4}^{5} \;.$$

Tabelle der Steifigkeiten nach Gleichung (11.14):

Element Knoten i j	ℓ [m]	I_y/I_y^c	$\bar{k}_{ii}^{j}$	$\bar{k}_{jj}^{i}$
1 2	3	0,25	0,1667	0,1667
2 3	5	1	0,4000	0,4000
2 4	3	0,25	0,1667	0,1667
4 5	5	0,5	0,2000	0,2000

Tabelle der Drehungsfaktoren nach Gleichung (11.16):

Knoten i	Element i - j	$\bar{k}_{ii}^{j}$	$\Sigma\, \bar{k}_{ii}^{j}$	D_i^j
2	2 - 1	0,1667		-0,1136
	2 - 3	0,4000	0,7333	-0,2727
	2 - 4	0,1667		-0,1136
4	4 - 2	0,1667	0,3667	-0,2273
	4 - 5	0,2000		-0,2727

Kontrolle: $\sum_{j \in I_i} D_i^j = -0{,}5$

In Bild 11.9 ist die Ausgleichsskizze mit den Knotennummern, den negativen Knotenmomenten und den Drehungsfaktoren dargestellt.

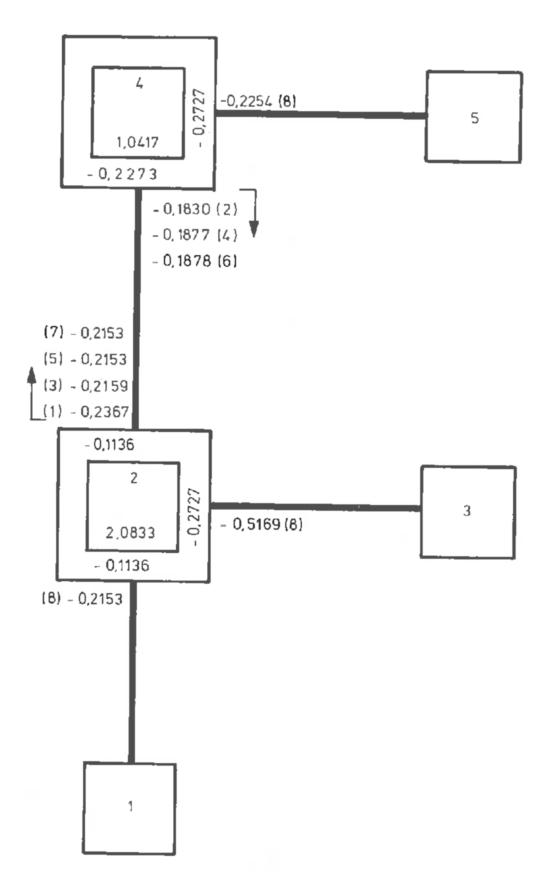


Bild 11.9 Ausgleichsskizze

Es folgt eine Beschreibung des Momentenausgleichs anhand von Bild 11.9. Da die Knoten 1, 3 und 5 Lagerpunkte sind, erfolgt ein Ausgleich der Momente nur zwischen den Knoten 2 und 4.

Beginn des Ausgleichs am Knoten mit dem betragsgrößten Knotenmoment (Knoten 2) nach Gleichung (11.17):

$$\bar{M}_{24}^{1} = -0,1136(2,0833 + 0) = -0,2367$$

Momentenausgleich am Knoten 4:

$$\overline{M}_{42}^{1} \equiv -0{,}2273(1{,}0417 - 0{,}2367) = -0{,}1830$$

Momentenausgleich am Knoten 2:

$$\overline{M}_{24}^{2} \equiv -0{,}1136(2{,}0833 - 0{,}1830) = -0{,}2159$$

In gleicher Weise berechnet man die Momentenanteile $\overline{M}_{42}^{2}$, $\overline{M}_{24}^{3}$, $\overline{M}_{42}^{3}$ und $\overline{M}_{24}^{4}$ und trägt sie an den Stellen (4), (5), (6) und (7) ein. Im siebten Schritt (7) ist die Iteration abgeschlossen, da $\overline{M}_{24}^{4}$ gleich $\overline{M}_{24}^{3}$ ist.
In einem achten Schritt (8) werden die nicht zu verteilenden Momentenanteile in den Elementen 1-2, 2-3 und 4-5 berechnet:

$$\overline{M}_{21} = -0{,}1136(2{,}0833 - 0{,}1878) \equiv -0{,}2153$$

$$\overline{M}_{23} = -0{,}2727(2{,}0833 - 0{,}1878) \equiv -0{,}5169$$

$$\overline{M}_{45} = -0{,}2727(1{,}0417 - 0{,}2153) \equiv -0{,}2254$$

Die endgültigen Stabendmomente nach Gleichung (11.18) werden tabellarisch ermittelt.

Tabelle der Stabendmomente:

Element Knoten i j	$\overline{M}_{ij}$	$\overline{M}_{ji}$	M_{Ri}^{j}	M_{Rj}^{i}	M_{i}^{j}	M_{j}^{i}
1 2	0	-0,2153	0	0	-0,2153	-0,4306
2 3	-0,5169	0	2,0833	-2,0833	1,0495	-2,6002
2 4	-0,2153	-0,1878	0	0	-0,6184	-0,5909
4 5	-0,2254	0	1,0417	-1,0417	0,5909	-1,2671

Für die Darstellung der Zustandslinie müssen die Stabendmomente am linken Stabende mit umgekehrten Vorzeichen aufgetragen werden. Bild 11.10 zeigt die Zustandslinie des Momentes für das zum Gesamtsystem ergänzte Tragwerk.

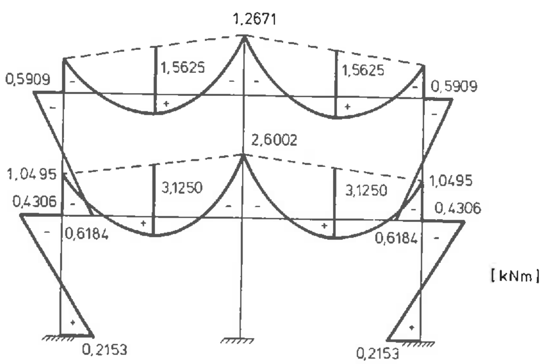


Bild 11.10 Momenten-Zustandslinie

Beispiel 11.2:
Für den in Bild 11.11 dargestellten unverschieblichen Rahmen wird die Momentenlinie nach dem Verfahren von Kani ermittelt.
Für die Ersatzknotenmomente ergibt sich nach Tafel 7.1 und Gleichung (11.6):

$$M_{R3}^{4} = q\ell^2/12 \equiv 5{,}3333 \text{ kNm} \; ; \quad M_{R4}^{3} = -M_{R3}^{4} \; ;$$

$$M_{R5}^{6} = P\ell/8 \equiv 5{,}0000 \text{ kNm} \; ; \quad M_{R6}^{5} = -M_{R5}^{6} \; .$$

Für alle Elemente EI_y = const.

Bild 11.11 System und Belastung

Damit können die Knotenmomente ermittelt werden:

$$\overline{M}_3 \equiv -\overline{M}_4 = -5{,}333 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_5 \equiv -\overline{M}_6 = -2{,}0 - 5{,}0 \equiv -7{,}0 \text{ kNm} \; .$$

Tabelle der Steifigkeiten nach Gleichung (11.14):

Element Knoten i j	ℓ [m]	I_y/I_y^c	$\bar{k}_{ii}^j$	$\bar{k}_{jj}^i$
1 3	3,000	1	0,6667	0,6667
3 4	8,000	1	0,2500	0,2500
2 4	3,000	1	0,6667	0,6667
3 5	3,000	1	0,6667	0,6667
3 6	8,544	1	0,1756	0
4 6	3,000	1	0,6667	0,6667
5 6	8,000	1	0,2500	0,2500

Tabelle der Drehungsfaktoren nach Gleichung (11.16):

Knoten i	Element i - j	$\bar{k}_{ii}^j$	$\Sigma\ \bar{k}_{ii}^j$	D_i^j
3	3 - 1	0,6667	1,7589	-0,1895
	3 - 4	0,2500		-0,0711
	3 - 6	0,1756		-0,0499
	3 - 5	0,6667		-0,1895
4	4 - 2	0,6667	1,5833	-0,2105
	4 - 3	0,2500		-0,0789
	4 - 6	0,6667		-0,2105
5	5 - 3	0,6667	0,9167	-0,3636
	5 - 6	0,2500		-0,1364
6	6 - 4	0,6667	0,9167	-0,3636
	6 - 5	0,2500		-0,1364

Kontrolle:

$$\sum_{j \in I_i} D_i^j = -0{,}5$$

In Bild 11.12 ist die Ausgleichsskizze mit den Knotennummern, den negativen Knotenmomenten und den Drehungsfaktoren dargestellt.

Da die Knoten 1 und 2 Lagerpunkte sind, erfolgt ein Momentenausgleich nur zwischen den Knoten 3, 4, 5 und 6. Das Element 3-6 ist am Knoten 6 gelenkig angeschlossen, deshalb erfolgt zwischen den Knoten 3 und 6 kein Momentenausgleich.

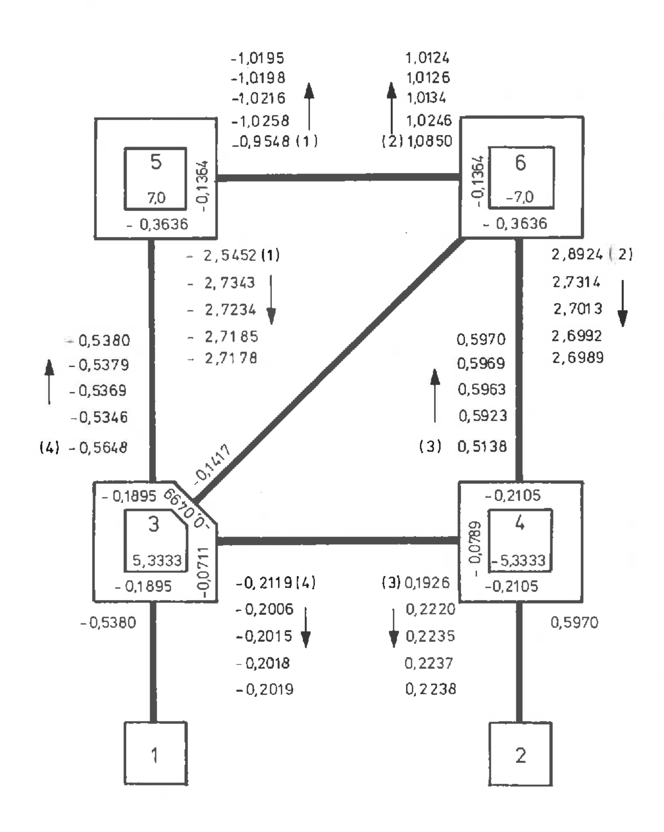


Bild 11.12 Ausgleichsskizze

Der Beginn der Iteration erfolgt am Knoten mit dem betragsgrößten Knotenmoment. Dem Ausgleich in Bild 11.12 liegt eine Knotenreihenfolge 5, 6, 4 und 3 zugrunde.

Nach Beendigung des Momentenausgleiches werden die nicht zu verteilenden Momentenanteile in den Elementen 1-3, 2-4 und 3-6 berechnet:

$$\bar{M}_{31} = -0{,}1895(\ 5{,}3333 + 0{,}2238 - 2{,}7178) \equiv -0{,}5380$$

$$\bar{M}_{42} = -0{,}2105(-5{,}3333 + 2{,}6989 - 0{,}2019) \equiv \ 0{,}5970$$

$$\bar{M}_{36} = -0{,}0499(\ 5{,}3333 + 0{,}2238 - 2{,}7178) \equiv -0{,}1417 \ .$$

Die endgültigen Stabendmomente nach Gleichung (11.18) werden tabellarisch ermittelt.

Tabelle der Stabendmomente:

Element Knoten i j	$\overline{M}_{ij}$	$\overline{M}_{ji}$	M_{Ri}^{j}	M_{Rj}^{i}	M_{i}^{j}	M_{j}^{i}
1 3	0	-0,538	0	0	-0,538	-1,076
3 4	-0,202	0,224	5,333	-5,333	5,153	-5,087
2 4	0	0,597	0	0	0,597	1,194
3 5	-0,538	-2,718	0	0	-3,794	-5,974
3 6	-0,142	0	0	0	-0,284	0
4 6	0,597	2,699	0	0	3,893	5,995
5 6	-1,020	1,012	5,000	-5,000	3,972	-3,996

Für die Darstellung der Zustandslinie müssen die Stabendmomente am linken Stabende mit umgekehrten Vorzeichen aufgetragen werden. In Bild 11.13 ist die Momenten-Zustandslinie dargestellt.

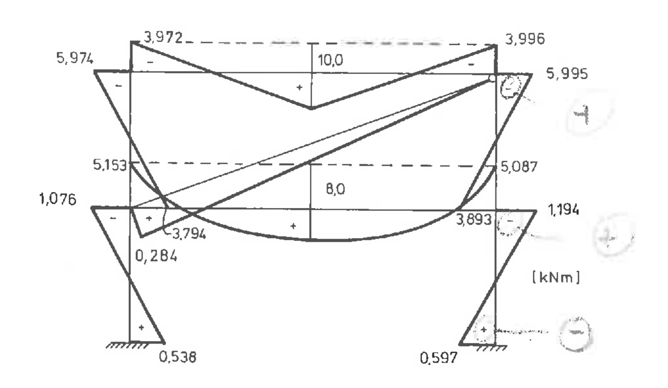


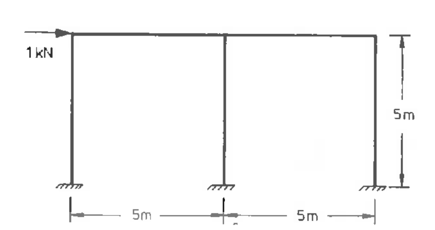
Bild 11.13 Momenten-Zustandslinie

11.3 Das Verfahren der konjugierten Gradienten

Das Verfahren des Momentenausgleiches nach Kani und die Gauß-Seidel'sche Iteration sind nur anwendbar für die

Grundgleichung des Drehwinkelverfahrens, also bei Vernachlässigung der Verformungseinflüsse der Normalkräfte. Das Verfahren der konjugierten Gradienten /67/ kann auch zur Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens unter Berücksichtigung der Normalkraftverformungen benutzt werden.

Wie leistungsfähig dieses Verfahren ist, wird an dem in Bild 11.14 dargestellten Rahmen deutlich: Der Rahmen wurde *unter Berücksichtigung der Normalkraftverformungen* mit dem Verfahren von Gauß-Seidel und mit dem Verfahern der konjugierten Gradienten berechnet. Der Rahmen hat sechs Freiheitsgrade der Verschiebung und drei Freiheitsgrade der Verdrehung.
Beim Verfahren der konjugierten Gradienten ist nach 8 Iterationsschritten die Lösung auf 10^{-8} genau. Bei der Gauß-Seidel'schen Iteration zeigte sich auch nach 100 Iterationen keine Konvergenz.



$I_y = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^4$
$A = 0{,}01\ m^2$

Bild 11.14 Zweifeldrahmen

Das Verfahren der konjugierten Gradienten wird im folgenden anhand der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens (6.6) $\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}$ erklärt. Der Iterationszähler ist ν, Die Ordnung der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ ist $n \times n$. Es werden *Richtungvektoren* $\underline{p}_\nu$ und *Restvektoren* $\underline{q}_\nu$ eingeführt.
Die Steifigkeitsmatrix ist positiv definit. Die Richtungsvektoren sollen bezüglich $\underline{K}$ *konjugiert* sein, d.h. daß die Vektoren $\underline{p}_\nu^T\ \underline{K}$ und $\underline{p}_\mu$ orthogonal sind (Anhang A1):

$$\underline{p}_\nu^T\ \underline{K}\ \underline{p}_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu \,. \qquad (11.19)$$

Wegen der positiven Definitheit von $\underline{K}$ ist:

$$\underline{p}_\nu^T \, \underline{K} \, \underline{p}_\nu > 0 \, . \tag{11.20}$$

Zu Beginn der Iteration wird ein beliebiger Vektor der Knotenverformungen $\underline{r}_0$ gewählt. Man erhält damit den Richtungsvektor $\underline{p}_0$ und den Restvektor $\underline{q}_0$:

$$\underline{p}_0 \equiv \underline{q}_0 = \underline{R} - \underline{K} \, \underline{r}_0 \, . \tag{11.21}$$

Mit einer Hilfsgröße

$$\alpha_\nu = \frac{\underline{q}_\nu^T \, \underline{q}_\nu}{\underline{p}_\nu^T \, \underline{K} \, \underline{p}_\nu} \tag{11.22}$$

werden der neue Vektor der Knotenverformungen und der zugehörige Restvektor bestimmt:

$$\underline{r}_{\nu+1} = \underline{r}_\nu + \alpha_\nu \, \underline{p}_\nu \tag{11.23}$$

$$\underline{q}_{\nu+1} = \underline{q}_\nu - \alpha_\nu \, \underline{K} \, \underline{p}_\nu \, . \tag{11.24}$$

Mit der Hilfsgröße

$$\beta_\nu = \frac{\underline{q}_{\nu+1}^T \, \underline{q}_{\nu+1}}{\underline{q}_\nu^T \, \underline{q}_\nu} \tag{11.25}$$

wird der neue Richtungsvektor berechnet:

$$\underline{p}_{\nu+1} = \underline{q}_{\nu+1} + \beta_\nu \, \underline{p}_\nu \, . \tag{11.26}$$

Der Iterationsprozeß wird mit den Gleichungen (11.22) bis (11.26) fortgesetzt, bis gilt:

$$\underline{q}_\nu^T \, \underline{q}_\nu \le \varepsilon \quad \text{(Fehlerschranke)}$$

oder $$\underline{p}_\nu^T \, \underline{K} \, \underline{p}_\nu \le \varepsilon \, .$$

Es kann gezeigt werden /67/, daß nach l Iterationsschritten ($l \le n$) $\underline{r}_l$ bis auf die Rechengenauigkeit gleich $\underline{r}$ ist (n-Schrittverfahren).

Die Methode der konjugierten Gradienten ist als iteratives Verfahren für die Lösung spezieller Probleme gut geeignet. Abgesehen davon, sollte jedoch den direkten Lösungsverfahren der Vorzug gegeben werden; sie sind bei linearen Problemen im allgemeinen weniger rechenintensiv.

Ralston und Wilf (/67/, Seite 122-126) geben ein ALGOL - Programm zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten an.

Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiel erläutert.

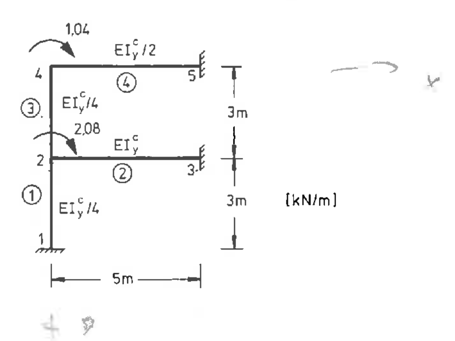


Bild 11.15 System und Belastung

Beispiel 11.3:

Für das System von Beispiel 11.1 (Bild 11.15) wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix unter Vernachlässigung der Normalkraftverformungen aufgestellt. Das sich ergebende [2×2]-Gleichungssystem wird mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten gelöst.

Es wird mit EI_y-fachen Verformungen gerechnet. Aus Beispiel 11.1 werden die Elemente der Steifigkeitsmatrix übernommen:

$$\underline{K} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{1}{k}_{22}+\overset{2}{k}_{22}+\overset{3}{k}_{22} & \overset{3}{k}_{24} \\ \hline \overset{3}{k}_{42} & \overset{3}{k}_{44}+\overset{4}{k}_{44} \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \equiv \left[\begin{array}{c|c} 0,3333+0,8+0,3333 & 0,1667 \\ \hline 0,1667 & 0,3333+0,4 \end{array}\right]$$

↑
Knoten

oder

$$\underline{K} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 44 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$$

Der Lastvektor ist: $\underline{R}^T = [-2{,}0833 \quad -1{,}0417]$.

Beginn der Iteration: $\nu = 0$, $\underline{r}_0 = \underline{0}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Richtungsvektor und Restvektor:

$$\underline{p}_0 \equiv \underline{q}_0 = \begin{bmatrix} -2{,}0833 \\ -1{,}0417 \end{bmatrix}$$

1. Iterationsschritt:

$$\alpha_0 = 5{,}4253/7{,}8847 = 0{,}6881$$

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}6881 \begin{bmatrix} -2{,}0833 \\ -1{,}0417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}4335 \\ -0{,}7168 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -2{,}0833 \\ -1{,}0417 \end{bmatrix} - \frac{0{,}6881}{30} \begin{bmatrix} 44 & 5 \\ 5 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}0833 \\ -1{,}0417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1386 \\ -0{,}2772 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = 0{,}0177$$

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1386 \\ -0{,}2772 \end{bmatrix} + 0{,}0177 \begin{bmatrix} -2{,}0833 \\ -1{,}0417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1017 \\ -0{,}2956 \end{bmatrix}$$

2. Iterationsschritt:

$$\alpha_1 = 0{,}0960/0{,}0692 = 1{,}3873$$

Lösung:

$$\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} -1{,}4335 \\ -0{,}7168 \end{bmatrix} + 1{,}3873 \begin{bmatrix} 0{,}1017 \\ -0{,}2956 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}2924 \\ -1{,}1269 \end{bmatrix}$$

Mit den Knotenverformungen werden nach Gleichung (7.4), analog zu (7.9) die Stabendmomente unter Beachtung der Ersatzknotenlasten errechnet:

$$\begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ \hdashline M_2^2 \\ M_3^2 \\ \hdashline M_2^3 \\ M_4^3 \\ \hdashline M_4^4 \\ M_5^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \\ \hdashline 24 & 0 \\ 12 & 0 \\ \hdashline 10 & 5 \\ 5 & 10 \\ \hdashline 0 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,2924 \\ -1,1269 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline 2,0833 \\ -2,0833 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \hdashline 1,0417 \\ -1,0417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2154 \\ -0,4308 \\ \hdashline 1,0494 \\ -2,6003 \\ \hdashline -0,6186 \\ -0,5910 \\ \hdashline 0,5909 \\ -1,2671 \end{bmatrix}$$

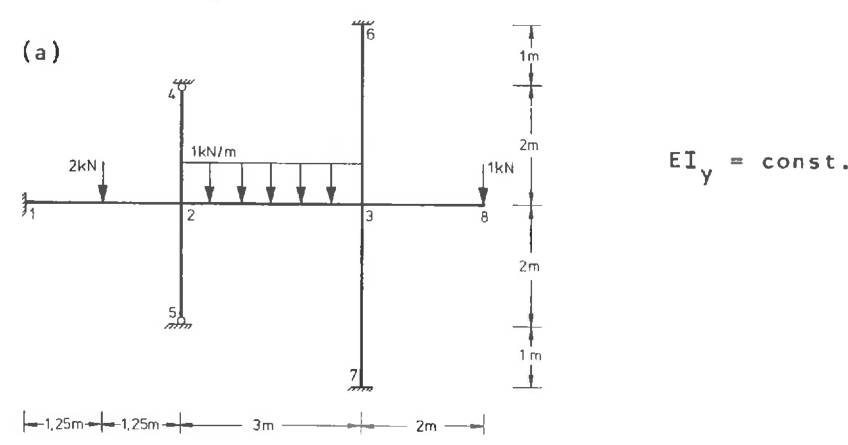
Dimension [kNm]

Unterschiede zu dem in Beispiel 11.1 nach dem Verfahren von Kani errechneten Momenten treten nur in der vierten Stelle nach dem Komma auf.

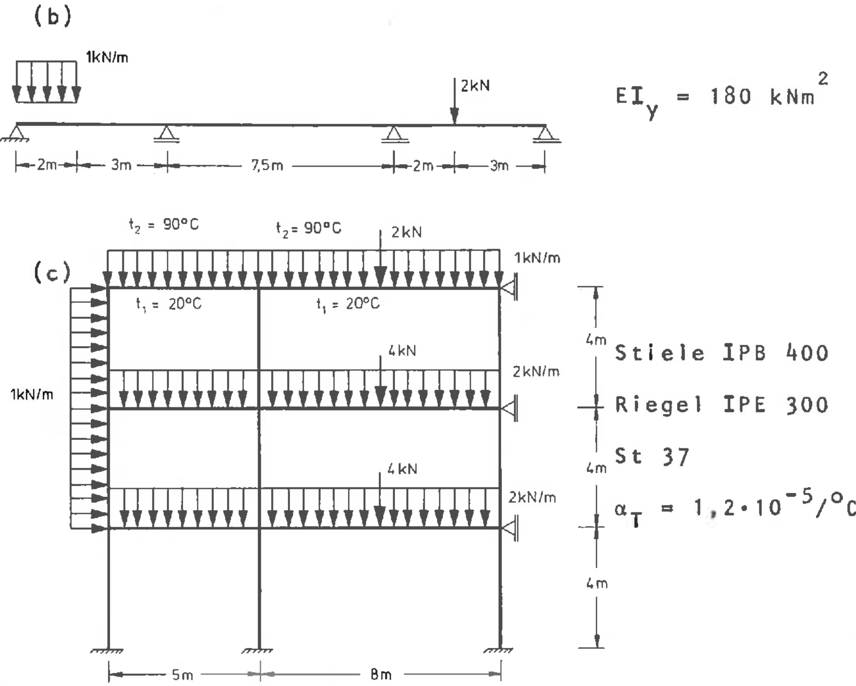
Aufgaben:

11.1 Man berechne die abgebildeten Systeme nach dem Verfahren von Kani.

(a)



EI_y = const.



11.2 (a) Man berechne das System von Aufgabe 11.1 (b) mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten.

(b) Man vergleiche die Anzahl der Additionen und Multiplikationen von Aufgabe 10.1 (a) und Aufgabe 11.1 (b).

(c) Man berechne das System von Aufgabe 11.1 (c) nach der direkten Steifigkeitsmethode mit SMIS und vergleiche die Ergebnisse.

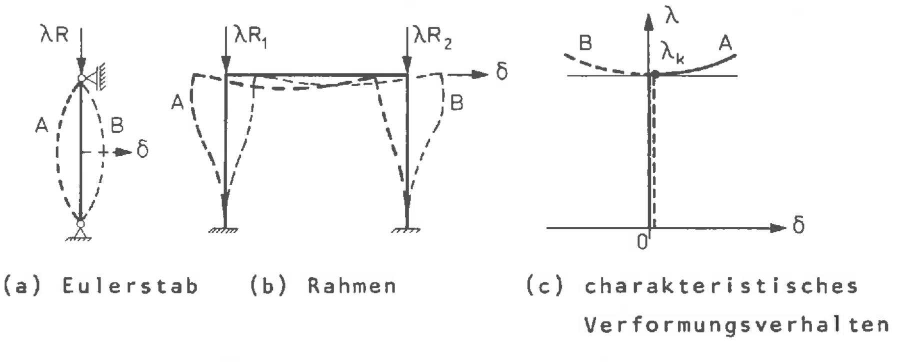
11.3 Für die Systeme von Aufgabe 11.1 sind die Normalkräfte, Querkräfte und Lagerreaktionen zu berechnen.

12 Elastische Stabilität ebener Stabtragwerke

Eine der wichtigsten Annahmen aller vorangehenden Kapitel sind die kleinen Verformungen (Abschnitt 1.3) des Tragwerkes. Die Gleichgewichtsbedingungen sind nur dann linear in den Stabendkräften, wenn der Einfluß der Verformungen vernachlässigbar klein ist. Die Gültigkeitsgrenzen dieser Annahme sind aus der Erfahrung bekannt und in den Normen für die Berechnung von Tragwerken festgehalten.
Die Annahme kleiner Verformungen stellt in jedem Falle eine Vernachlässigung dar: Jede Belastung verursacht in einem Tragwerk Verformungen. Die Gleichgewichtsbedingungen wurden jedoch bisher immer für den Ausgangszustand formuliert, also für den unverformten Zustand. Ein erster Schritt zur genaueren Berechnung ist deshalb die Untersuchung benachbarter Verformungszustände.
Die Erfahrung zeigt, daß verschiedene Tragwerke bei einer Laststeigerung anfänglich vernachlässigbar kleine Verformungen aufweisen; bei Erreichen einer bestimmten Belastung treten nahezu unvermittelt größere Verformungen auf. Dieses Verhalten hat in der Praxis meist katastrophale Folgen; der Einsturz eines Tragwerkes erfolgt ohne Vorwarnung durch sichtbare Verformungen. Wir werden deshalb im folgenden die benachbarten Verformungszustände (Nachbarzustände) des unverformten Tragwerkes genauer untersuchen.
Die Beschränkung auf ebene Stabwerke erscheint im Rahmen einer Einführung zweckmäßig. Hierdurch ist es möglich, den Zusammenhang mit den bekannten Darstellungen /65/ zu verdeutlichen. Alle Matrizengleichungen, mit Ausnahme der Elementmatrizen, sind jedoch für allgemeine Tragwerke gültig.

12.1 Problembeschreibung und Annahmen

Für die Problembeschreibung wählen wir zwei einfache Beispiele (Bild 12.1): Einen Eulerstab (nach L. Euler, 1707-



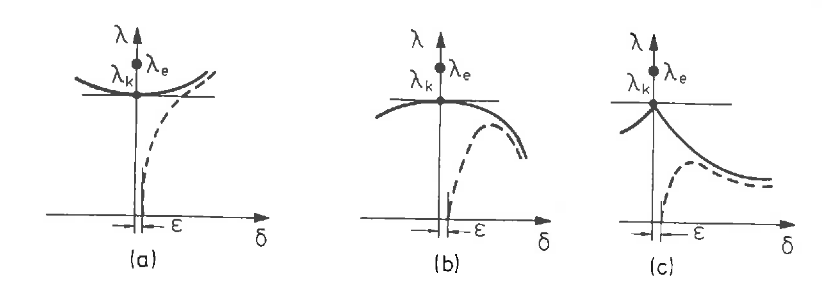
(a) Eulerstab (b) Rahmen (c) charakteristisches Verformungsverhalten

Bild 12.1 Verzweigungsprobleme

1783) und einen eingespannten Rahmen.
Wird eine gegebene Belastung langsam (quasi-statische Belastung) und mit einem Proportionalitätsfaktor λ erhöht, dann zeigt das System (a) anfänglich keine und das System (b) nur vernachlässigbar kleine elastische Verformungen. Bei Erreichen einer kritischen Belastung, gekennzeichnet durch den Proportionalitätsfaktor λ_k, treten plötzlich größere Verformungen δ unter nahezu konstanter Belastung $\lambda_k \underline{R}$ auf. Diese Verformungen sind bei ideal-geraden Elementen ohne Imperfektionen irgendwelcher Art nicht eindeutig: Es können sich die Verformungen A oder B (Bild 12.1) einstellen. Für die Belastung $\lambda_k \underline{R}$ ergibt sich ein *Verzweigungspunkt* im Verformungsdiagramm (Bild 12.1 (c)). Die Systeme besitzen bei Erreichen der kritischen Belastung *kein stabiles* Verformungsverhalten.
Man bezeichnet solche Probleme deshalb als *elastische Verzweigungsprobleme* oder als *elastische Stabilitätsprobleme*.

Das Verformungsverhalten des Tragwerkes bei Anfangsverformungen $\delta > \varepsilon$ ist systemabhängig (Bild 12.2). Bei verschiedenen Tragwerken (z.B. Bild 12.1) ist eine zusätzliche Laststeigerung bis zum Erreichen relativ großer Verformungen möglich (Bild 12.2 (a)). Bei anderen Tragwerken, wie z.B. bei Flächentragwerken kann die kritische Belastung nur im Idealfall erreicht werden (Bild 12.2 (b) und (c)); jeder

Verformungszustand in einer ε-Umgebung von λ_k führt zu wachsenden Verformungen unter kleineren Lasten ($\lambda < \lambda_k$). Bei diesen Tragwerken müssen die unvermeidbaren Imperfektionen besonders beachtet werden.



λ_k: ideal-elastische Grenzlast
λ_e: (elastische) Proportionalitätsgrenze
—— ideales Verformungsverhalten
--- elastisches Verformungsverhalten

Bild 12.2 Ideales und elastisches Verformungsverhalten

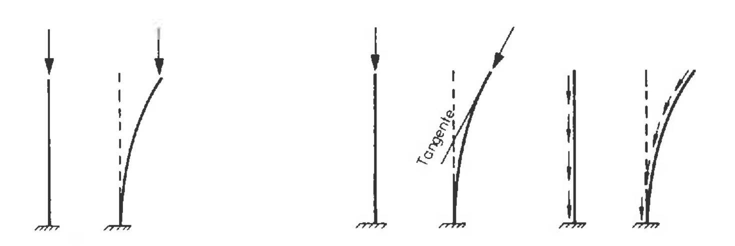
Bei großen Verformungen tritt zusätzlich zu dem geometrisch bedingten, nichtlinearen Verhalten ein weiterer Einfluß auf: Der Werkstoff erreicht die Grenze des elastischen Verhaltens (Proportionalitätsgrenze). Insgesamt gesehen ergibt sich damit ein sehr kompliziertes Last-Verformungsverhalten, das wir nur näherungsweise in einer Berechnung erfassen können.

Eine wesentliche *Annahme*, die wir im folgenden beibehalten werden, betrifft das elastische Stoffgesetz: *Auch bei großen Verformungen wird vorausgesetzt, daß sich der Werkstoff ideal-elastisch verhält.*

Für das Stabilitätsproblem, das wir hier behandeln, gelten die folgenden zusätzlichen *Einschränkungen:*

- Die Belastung besitzt in jedem benachbarten Verformungszustand dieselbe Richtung wie im Ausgangszustand (Bild 12.3 (a)); diese Belastung bezeichnet man als *konservativ*. Probleme mit nicht konservativer Belastung (Bild

12.3 (b)) erfordern zum Teil andere Berechnungsmethoden und werden hier ausgeschlossen (siehe z.B. Leipholz /40/).



(a) konservativ (b) nicht konservativ

Bild 12.3 Konservative und nicht konservative Belastung

- Das Tragwerk besitzt keine Imperfektionen, d.h. die Stabachsen sind ideal-gerade und ohne Vorverformungen. Im Ausgangszustand treten keine Eigenspannungszustände auf.
- Die Belastung ist proportional zum Lastfaktor $\lambda > 0$; für jede Belastung $\underline{R}'$ gilt:

$$\underline{R}' = \lambda \underline{R} \ . \tag{12.1}$$

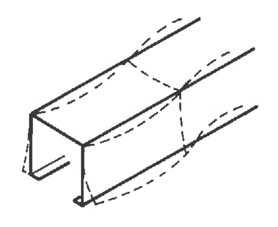
- In einer ε-Umgebung des Ausgangszustandes sind alle inneren Kraftgrößen proportional zu λ.
  Die Stabendkräfte $\underline{F}'$ infolge einer Belastung $\underline{R}'$ sind:

$$\underline{F}' = \lambda \underline{F} \ . \tag{12.2}$$

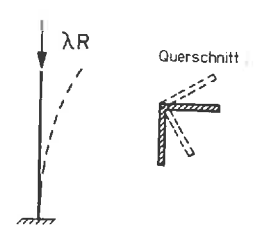
Mit diesen Annahmen beschränken wir uns auf die Untersuchung eines Nachbarzustandes des unverformten Tragwerkes: Bis zum Erreichen von λ_k wird angenommen, daß die Stabendkräfte linear von der Belastung abhängen (*lineare Stabilitätstheorie*).
Als Lösung des Stabilitätsproblemes erhält man deshalb nur den *kritischen Lastparameter* λ_k, eine Aussage über das Verformungsverhalten nach Bild 12.2 ist nicht möglich.

Bei Stabtragwerken können eine Reihe zusätzlicher Stabilitätsprobleme auftreten, die wir hier ausschließen müssen:

- Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt können vor Erreichen der Stabilitätsgrenze λ_k ausbeulen (Bild 12.4 (a)) /55/.



(a) lokales Ausbeulen



(b) Biegedrillknicken

Bild 12.4 Stabilitätsprobleme bei Stabtragwerken

- Bei Erreichen der Stabilitätsgrenze können neben den Biegeverformungen auch Verdrehungen in der Querschnittsebene auftreten (Bild 12.4 (b)). Dieses Stabilitätsproblem bezeichnet man als *Biegedrillknicken* oder, wenn zusätzliche Querbelastungen auftreten, als *Kippen*.

Im folgenden wird ausschließlich ein benachbarter Verformungszustand untersucht, der durch Biegeverformungen (*Knikken*) unter *konservativer Belastung* entsteht.

12.2 Die Knickdeterminante

Durch die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ wird das elastische Verhalten eines Tragwerkes beschrieben; nach (6.6) ist

$$\underline{K}\ \underline{r} = \underline{R}\ .$$

Die Steifigkeitsmatrix kann mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten aus den Gleichgewichtsbedingungen des unverformten Systems abgeleitet werden (Kapitel 6). Bei linearen Stabilitätsproblemen sind die Gleichgewichtsbedingungen für einen benachbarten Verformungszustand aufzustellen. Die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens für den Nachbarzu-

stand ist linear in $\underline{r}$; die Steifigkeitsmatrix ergibt sich jedoch als nichtlineare Funktion der Schnittgrößen (Stabendkräfte):

$$\underline{K}(\lambda\underline{F})\ \underline{r} = \lambda\underline{R}\ . \qquad (12.3)$$

Gesucht ist der Bereich $0 < \lambda < \lambda_k$, in dem es eindeutige Lösungen $\underline{r}$ gibt. Ein Gleichungssystem besitzt jedoch nur dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist.
Diese Eigenschaft dient bei der "Determinantenmethode" zur Bestimmung der kritischen Belastung: Man denkt sich die Belastung $\underline{R}' = \lambda\underline{R}$, beginnend bei $\lambda = \varepsilon$, für wachsendes λ aufgebracht und bestimmt für jeden Lastparameter die Determinante von $\underline{K}(\lambda\underline{F})$. Die kritische Belastung $\lambda_k\underline{R}$ ist dann erreicht, wenn die Determinante zu Null wird: Es gibt keine eindeutige Lösung von (12.3).
Wir fassen dies zusammen in dem folgenden

Satz 12.1: *Der kritische Lastparameter λ_k ist der kleinste Parameter $\lambda > 0$, für den die Determinante der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}(\lambda\underline{F})$ zu Null wird. $\lambda\underline{F}$ sind die Stabendkräfte, die im Nachbarzustand mit der Belastung $\lambda\underline{R}$ im Gleichgewicht sind.*

Damit haben wir das Stabilitätsproblem für ein Stabtragwerk auf eine Steifigkeitsberechnung und auf die Bestimmung der ersten Nullstelle einer Determinante zurückgeführt.
Wir beginnen mit der Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Nachbarzustandes:
Aufgrund der Annahme kleiner Verformungen bis zum Erreichen von λ_k kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix mit der direkten Steifigkeitsmethode analog zu (6.10) aufgestellt werden:

$$\underline{C}\ \underline{k}_F\ \underline{C}^T = \underline{K}(\lambda\underline{F})\ .$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}_F^i$ sind Funktionen der Stabendkräfte.

Die Berechnung dieser nichtlinearen Elementsteifigkeiten ist im allgemeinen sehr aufwendig. Nur für ebene Stabelemente ergibt sich eine relativ einfache Möglichkeit der Darstellung, die aus der *Mechanik* /39/ oder dem *Stahlbau* /73/ bekannt sein dürfte. Diese Darstellung wird im folgenden übernommen und in Matrizenschreibweise dargestellt.
Die nichtlineare Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_F^i$ für ein Stabelement ⓘ wird am *unbelasteten* differentiellen Element der Länge $d\overline{x}$ abgeleitet (Bild 12.5).

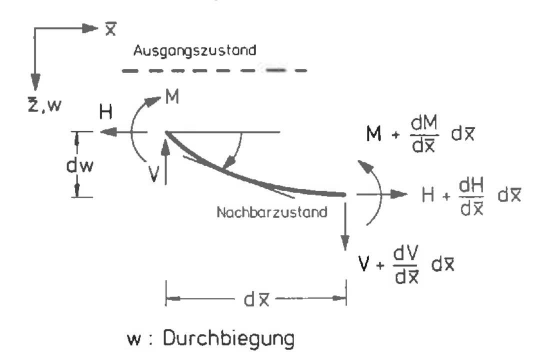


Bild 12.5 Stabelement im benachbarten Verformungszustand

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Kennzeichnungen der lokalen Koordinaten und der Elementnummer zunächst weggelassen. Man erhält die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$-V + \left(V + \frac{dV}{dx}\,dx\right) = 0\,, \qquad \text{(i)}$$

$$-H + \left(H + \frac{dH}{dx}\,dx\right) = 0\,, \qquad \text{(ii)}$$

$$-M + \left(M + \frac{dM}{dx}\,dx\right) - \left(V + \frac{dV}{dx}\,dx\right)dx + \left(H + \frac{dH}{dx}\,dx\right)dw = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Aus (i) und (ii) folgt:

$$\frac{dV}{dx}\,dx = 0\,, \quad V = \text{const.}$$

$$\frac{dH}{dx}\,dx = 0\,, \quad H = \text{const.}$$

Damit ergibt sich (iii) zu:

$$\frac{dM}{dx}\,dx - V\,dx + H\,dw = 0 . \qquad \text{(iv)}$$

Diese Gleichung läßt sich wie folgt umformen:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{dM}{dx} - V + H\,\frac{dw}{dx}\right\} = 0$$

oder
$$\frac{d^2M}{dx^2} = -H\,\frac{d^2w}{dx^2} . \qquad \text{(v)}$$

Durch Vergleich mit der Grundgleichung der Balkenbiegung unter Vernachlässigung der Verformungsanteile infolge Querkraft (vgl. (5.11)) ist mit $w \equiv w_z$, $M \equiv M_y$, $I \equiv I_y$:

$$w'' = -M/EI ,$$

$$(\ )'' = \frac{d^2}{dx^2} , \quad EI = \text{const.}$$

Man erhält:
$$EIw^{IV} = -\frac{d^2M}{dx^2} \equiv H\,\frac{d^2w}{dx^2} .$$

Der benachbarte Verformungszustand wird also beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$EIw^{IV} - H\,w'' = 0 .$$

Bei kleinen Verformungen ist die Normalkraft N ungefähr gleich der Horizontalkraft H.
Wählt man das Stabelement Typ-a, so sind die mit dem Parameter λ versehenen, linear unabhängigen Stabendkräfte (siehe Beispiel 3.1):

$$\lambda F_1 \equiv N$$

$$\lambda F_2 \equiv -M(0) = EIw''(0)$$

$$\lambda F_3 \equiv M(\ell) = -EIw''(\ell) .$$

Damit ist folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$EIw^{IV} - \lambda F_1 \, w'' = 0 \; .$$

Durch Umformung ergibt sich:

$$w^{IV} + \kappa^2 \, w'' = 0 \qquad (12.4)$$

$$\text{mit} \quad \kappa^2 = \frac{-\lambda F_1}{EI} \, , \quad (F_1 > 0 \, , \quad \text{Zug}) \; . \qquad (12.5)$$

(12.4) ist die *Differentialgleichung der Stabknickung*.
Für ihre Lösung müssen insgesamt vier *Randbedingungen* formuliert werden.
Es ist eine lineare, homogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Basislösungen der Form

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\kappa x) + C_4 \sin(\kappa x) \qquad (12.6)$$

für $\kappa^2 > 0$ (Druck) und

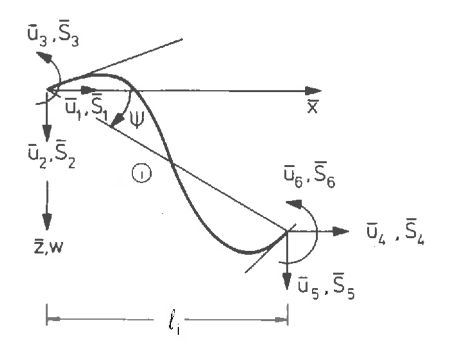
$$w = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 \cosh(\kappa x) + \tilde{C}_4 \sinh(\kappa x) \qquad (12.7)$$

für $\kappa^2 < 0$ (Zug)

findet man mit der charakteristischen Gleichung (/96/, Seite 435) von (12.4). Hierbei sind die Konstanten C_i und $\tilde{C}_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) Freiwerte, die aus den Randbedingungen bestimmt werden müssen.
Wir zeigen zunächst, wie sich die Konstanten $C_1, \ldots, C_4$ aus den Randbedingungen ergeben. Die Randbedingungen sind Stabendverformungen oder Linearkombinationen der Stabendverformungen (z.B. ψ, siehe Bild 12.6).
Für den Stabdrehwinkel gilt:

$$\psi = (\bar{u}_5 - \bar{u}_2)/\ell_i \; . \qquad (12.8)$$

Die Stablänge ℓ_i wird im verformten und unverformten Zustand gleichgesetzt.



Stabenddrehwinkel: $\bar{u}_3$, $\bar{u}_6$

Stabdrehwinkel: ψ

Bild 12.6 Verformungen und Stabendkräfte

Die Randbedingungen im um $\bar{u}_2$ parallel verschobenen Element:

$$\begin{aligned} &\text{für } \bar{x} = 0 \quad \text{ist} \quad w = 0 \quad &&\text{und} \quad w' = -\bar{u}_3 \\ &\text{für } \bar{x} = \ell_i \quad \text{ist} \quad w = \bar{u}_5 - \bar{u}_2 \quad &&\text{und} \quad w' = -\bar{u}_6 \;. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Durch Einsetzen in (12.6) und in die Ableitung w' ergibt sich das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1, ..., C_4 ($\sin\kappa\ell \equiv \sin(\kappa\ell)$, $\cos\kappa\ell \equiv \cos(\kappa\ell)$ und $\ell \equiv \ell_i$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \\ 1 & \ell & \cos\kappa\ell & \sin\kappa\ell \\ 0 & 1 & -\kappa\sin\kappa\ell & \kappa\cos\kappa\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{u}_3 \\ \bar{u}_5 - \bar{u}_2 \\ -\bar{u}_6 \end{bmatrix} \tag{12.10}$$

Die Lösung berechnet man durch sukzessive Elimination zu:

$$C_1 = \frac{(\sin\kappa\ell - \kappa\ell\cos\kappa\ell)\bar{u}_3 + (\kappa\ell - \sin\kappa\ell)\bar{u}_6 + \kappa(1-\cos\kappa\ell)(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2\kappa(1-\cos\kappa\ell) - \kappa^2\ell\sin\kappa\ell}$$

$$C_2 = \frac{(\cos\kappa\ell - 1)\bar{u}_3 - (1-\cos\kappa\ell)\bar{u}_6 - \kappa\sin\kappa\ell(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2(1-\cos\kappa\ell) - \kappa\ell\sin\kappa\ell} \tag{12.11}$$

$$C_3 = -C_1$$

$$C_4 = \frac{(\kappa\ell\sin\kappa\ell + \cos\kappa\ell - 1)\bar{u}_3 + (1-\cos\kappa\ell)\bar{u}_6 + \kappa\sin\kappa\ell(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{2\kappa(1-\cos\kappa\ell) - \kappa^2\ell\sin\kappa\ell} \;.$$

Damit ist die Funktion der Durchbiegung bestimmt. Die Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}$ werden mit den Gleichgewichtsbedingungen am verformten System in Abhängigkeit von λF_1 aus den Ableitungen der Funktion der Durchbiegung w berechnet.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= -\lambda F_1 \\
\bar{S}_2 &= -\lambda F_1 \, \psi - \lambda(F_2 + F_3)/\ell_i \\
\bar{S}_3 &= \lambda F_2 \equiv -M(0) = EIw''(0) \\
\bar{S}_4 &= \lambda F_1 \\
\bar{S}_5 &= \lambda F_1 \, \psi + \lambda(F_2 + F_3)/\ell_i \\
\bar{S}_6 &= \lambda F_3 \equiv M(\ell_i) = -EIw''(\ell_i)
\end{aligned} \qquad (12.12)$$

Durch Einsetzen der Ableitungen von (12.6)

$$w''(x) = -\kappa^2 \, C_3 \cos(\kappa x) - \kappa^2 \, C_4 \sin(\kappa x)$$

mit $(\kappa^2 > 0, \text{ Druck})$

und mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\sin\kappa\ell - \kappa\ell \cos\kappa\ell}{2(1 - \cos\kappa\ell) - \kappa\ell \sin\kappa\ell} \, \kappa \, EI \, , \\
\Phi_2 &= \frac{\kappa\ell - \sin\kappa\ell}{2(1 - \cos\kappa\ell) - \kappa\ell \sin\kappa\ell} \, \kappa \, EI \, ,
\end{aligned} \qquad (12.13)$$

$(\kappa^2 > 0, \text{ Druck})$

erhält man:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_3 &= \Phi_1 \, \bar{u}_3 + \Phi_2 \, \bar{u}_6 + (\Phi_1 + \Phi_2)\psi \, , \\
\bar{S}_6 &= \Phi_2 \, \bar{u}_3 + \Phi_1 \, \bar{u}_6 + (\Phi_1 + \Phi_2)\psi \, .
\end{aligned} \qquad (12.14)$$

Für die Normalkräfte gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= EA(\bar{u}_1 - \bar{u}_4)/\ell_i \\
\bar{S}_4 &= EA(-\bar{u}_1 + \bar{u}_4)/\ell_i \, .
\end{aligned} \qquad (12.15)$$

Zusammen mit Gleichung (12.12) sind damit alle Stabendkräfte als Funktionen der Stabendverformungen und der Normalkraft λF_1 bekannt.

Die entsprechende Lösung von (12.7) für $\kappa^2 < 0$ (Zug) berechnet man am zweckmäßigsten durch Transformation von Φ_1 und Φ_2 mit

$$\kappa = i\sqrt{\frac{|\lambda F_1|}{EI}}\ , \quad i = \sqrt{-1} \text{ (imaginäre Einheit)}$$

und
$$\cos(i\kappa\ell) = \cosh(\kappa\ell)\ , \tag{12.16}$$
$$\sin(i\kappa\ell) = i\,\sinh(\kappa\ell)\ .$$

Es ergibt sich:

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{\sinh\kappa\ell - \kappa\ell\,\cosh\kappa\ell}{2(\cosh\kappa\ell - 1) - \kappa\ell\,\sinh\kappa\ell}\,\kappa\,EI\ ,$$
$$\bar{\Phi}_2 = \frac{\kappa\ell - \sinh\kappa\ell}{2(\cosh\kappa\ell - 1) - \kappa\ell\,\sinh\kappa\ell}\,\kappa\,EI\ . \tag{12.17}$$

Mit $\bar{\Phi}_1$ für Φ_1 und $\bar{\Phi}_2$ für Φ_2 gelten die Gleichungen (12.12), (12.14) und (12.15) auch für Elemente mit positiver Normalkraft λF_1.
Damit kann die Beziehung zwischen Stabendverformung und Stabendkräften aufgestellt werden. In Gleichung (12.12) läßt man jedoch die Querkräfte $\bar{S}_2$ und $\bar{S}_5$ weiterhin von λF_1 explizit abhängen. Dadurch ergibt sich eine in $\underline{\bar{u}}$ lineare Steifigkeitsbeziehung, bei der jedoch die Steifigkeitsmatrix $\underline{\bar{k}}_F$ von der unbekannten Stabendkraft λF_1 abhängig ist:

$$\underline{\bar{S}}^i = \underline{\bar{k}}_F^i\,\underline{\bar{u}}^i\ . \tag{12.18}$$

Mit den Gleichungen (12.12), (12.14) und (12.15) und mit

$$\bar{\bar{\Phi}}_1 = \frac{2}{\ell^2}(\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{\lambda F_1}{\ell}\ ,$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_2 = (\Phi_1 + \Phi_2)/\ell$$

erhält man die gesuchte Steifigkeitsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ & \bar{\Phi}_1 & -\bar{\Phi}_2 & 0 & -\bar{\Phi}_1 & -\bar{\Phi}_2 \\ & & \Phi_1 & 0 & \bar{\Phi}_2 & \Phi_2 \\ \hline & & & EA/\ell & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & \bar{\Phi}_1 & \bar{\Phi}_2 \\ & & & & & \Phi_1 \end{array}\right]}_{\underline{\bar{k}}_F^i} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} \qquad (12.19)$$

$(\kappa^2 > 0, \text{ Druck})$

Durch linksseitige Multiplikation von (12.19) mit der Drehungsmatrix $\underline{L}_D{}^i$ erhält man:

$$\underline{L}_D{}^i \, \underline{\bar{S}}^i \equiv \underline{S}^i = \underline{L}_D{}^i \, \underline{\bar{k}}_F^i \, \underline{\bar{u}}^i \; . \qquad (12.20)$$

Für die Stabendverformungen gilt:

$$\underline{\bar{u}}^i = (\underline{L}_D{}^i)^T \, \underline{u}^i \; .$$

Durch Einsetzen in (12.20) folgt:

$$\underline{S}^i = \underline{k}_F^i \, \underline{u}^i$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix des Elementes (i)

$$\underline{k}_F^i = \underline{L}_D{}^i \, \underline{\bar{k}}_F^i \, (\underline{L}_D{}^i)^T \; . \qquad (12.21)$$

Die Koordinatendrehung ergibt:

$$\underline{k}_F^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c^2 EA/\ell + s^2 \bar{\Phi}_1 & sc(EA/\ell - \bar{\Phi}_1) & s\bar{\Phi}_2 & -c^2 EA/\ell - s^2 \bar{\Phi}_1 & -sc(EA/\ell - \bar{\Phi}_1) & s\bar{\Phi}_2 \\ & s^2 EA/\ell + c^2 \bar{\Phi}_1 & -c\bar{\Phi}_2 & -sc(EA/\ell - \bar{\Phi}_1) & -s^2 EA/\ell - c^2 \bar{\Phi}_1 & -c\bar{\Phi}_2 \\ & & \Phi_1 & -s\bar{\Phi}_2 & c\bar{\Phi}_2 & \Phi_2 \\ \hline & \text{symmetrisch} & & c^2 EA/\ell + s^2 \bar{\Phi}_1 & sc(EA/\ell - \bar{\Phi}_1) & -s\bar{\Phi}_2 \\ & & & & s^2 EA/\ell + c^2 \bar{\Phi}_1 & c\bar{\Phi}_2 \\ & & & & & \Phi_1 \end{array}\right]$$

$(\kappa^2 > 0, \text{ Druck}) \qquad (12.22)$

$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i \; , \quad c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \; .$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_F^i(\lambda F_1^i)$ nach (12.22) besitzt denselben Aufbau wie die Steifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ des ebenen Stabelementes (Anhang A3); $\underline{k}_F^i(\lambda F_1^i)$ kann jedoch für $\lambda F_1^i = 0$ nicht aufgestellt werden: Man erhält nämlich für $\bar{\Phi}_1$ und $\bar{\Phi}_2$ unbestimmte Ausdrücke der Form (0/0). Durch Anwendung der Regel von l'Hospital ergeben sich die Grenzwerte:

$$\lim_{\lambda F_1 \to 0} \bar{\Phi}_1 = \frac{4EI}{\ell}$$

$$\text{und} \quad \lim_{\lambda F_1 \to 0} \bar{\Phi}_2 = \frac{2EI}{\ell} \,. \qquad (12.23)$$

Damit geht die nichtlineare Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}_F^i(\lambda F_1^i)$ in die lineare Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ über (siehe Abschnitt 6.2).
Mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}_F^i(\lambda F_1^i)$ kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\underline{K}(\lambda \underline{F}_1)$$

aufgestellt werden.
Hierzu ist im allgemeinen eine erste lineare Berechnung am unverformten System erforderlich, mit der der Vektor der Normalkräfte

$$\underline{F}_1^T = [F_1^1 \; \dots \; F_1^n]$$

bestimmt wird. Mit den bekannten Normalkräften können dann elementweise die Werte κ^i festgelegt werden. Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{k}_F^i$ werden unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Normalkräfte besetzt. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}(\lambda \underline{F}_1)$ stellt man mit der direkten Steifigkeitsmethode auf.

12.3 Lösung von Knickproblemen mit der Determinantenmethode

Den kritischen Lastparameter erhält man durch Lösung der folgenden Aufgabe:

$$\lambda_k = \min \{\lambda \,|\, \det(\underline{K}(\lambda \underline{F}_1)) = 0, \; \lambda > 0\} \,. \qquad (12.24)$$

Gesucht ist der kleinste Wert $\lambda > 0$, für welchen die Determinante zu Null wird (vgl. Satz 12.1). Dies bereitet bei einer größeren Anzahl n von Freiheitsgraden der Verschiebung einen erheblichen numerischen Aufwand und zum Teil auch beträchtliche Schwierigkeiten.
Die Elemente der Matrix $\underline{K}$ sind transzendente Funktionen; für $\underline{F}_1 \to \underline{0}$ erhält man jedoch einen positiven Wert der Determinante. Der Grenzübergang (12.23) führt zur linearen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix ($\det(\underline{K}) > 0$). Der Verlauf der Determinante kann damit qualitativ dargestellt werden (Bild 12.7).

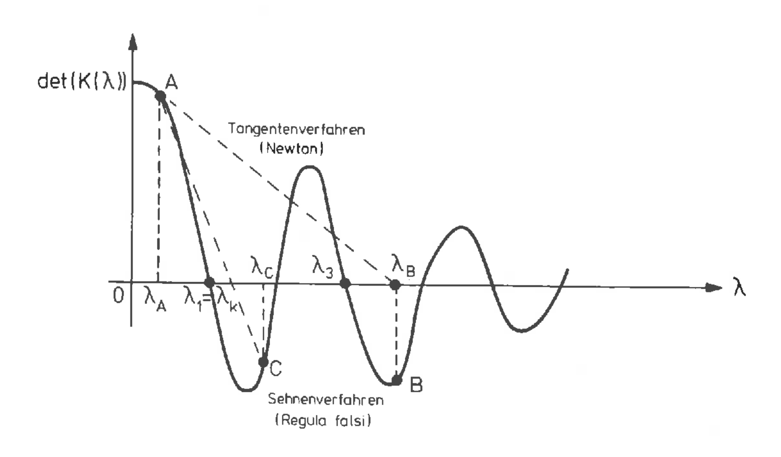


Bild 12.7 Determinantenverlauf und Nullstellenberechnung

Die Berechnung der ersten Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_k$ bereitet Schwierigkeiten: Das Newton'sche Iterationsverfahren erfordert die Ableitung der Determinante der Steifigkeitsmatrix nach λ. Diese Ableitung kann nur in Ausnahmefällen auf direktem Wege berechnet werden (eine allgemeinere lineare Approximation wird im nächsten Abschnitt dargestellt). Eine Berechnung mit dem Newton'schen Iterationsverfahren kann zudem zu einer zweiten oder höheren Nullstelle führen (Bild 12.7: A, λ_B, B, ..., λ_3). Dies könnte zu einer gefährlichen Überschätzung der aufnehmbaren Belastung führen.
Es ist deshalb notwendig, in jedem Fall Abschätzungen der

Form (Bild 12.7)

$$\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_2$$

an den Anfang der Berechnung zu stellen. Derartige Abschätzungen können mit den Euler-Fällen (Bild 12.8) gefunden werden. Es ist möglich, mit einer Sehnenapproximation (Regula falsi, A - C in Bild 12.7)

$$\lambda = \lambda_A - \det(\underline{K}(\lambda_A)) \frac{\lambda_A - \lambda_C}{\det(\underline{K}(\lambda_A)) - \det(\underline{K}(\lambda_C))} \qquad (12.25)$$

Näherungslösungen zu berechnen.

Wir zeigen zunächst zwei einfache, direkte Anwendungen der Determinantenmethode, die den Zusammenhang mit den bekannten Lösungsverfahren herstellen.

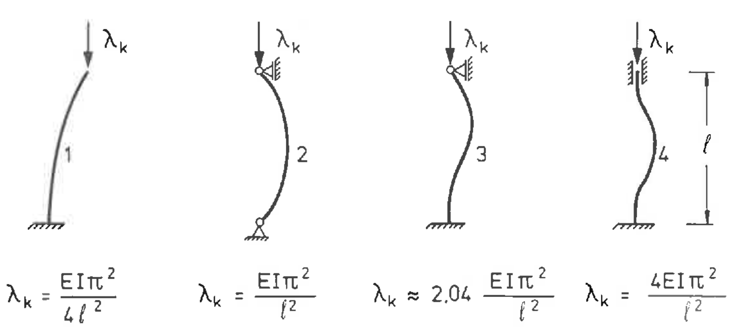


Bild 12.8 Eulerstäbe und kritische Belastung

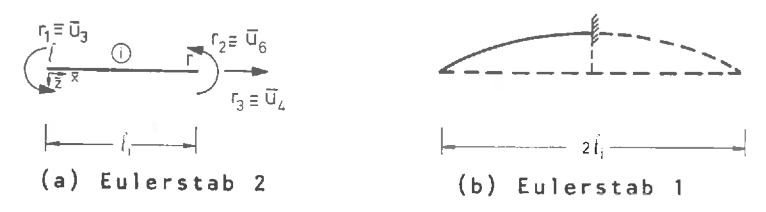
Beispiel 12.1:

Berechnung der Knicklast der Eulerstäbe nach der Determinantenmethode. Wir beginnen mit dem Eulerstab 2.

Zunächst werden die Freiheitsgrade der Knotenverformungen festgelegt (Bild 12.9 (a)).

Die Stablängsverformung r_3 wird durch das Elastizitätsgesetz beschrieben und gilt für alle $\lambda < \lambda_k$:

$$\frac{EA}{\ell} r_3 = \lambda F_1 \ .$$



(a) Eulerstab 2 (b) Eulerstab 1

Bild 12.9 Freiheitsgrade der Knotenverformung

Mit den Knotenverformungen r_1 und r_2 gilt für das Momentengleichgewicht rechts und links:

$$\Phi_1 \, r_1 + \Phi_2 \, r_2 = 0 \quad \text{(3. Zeile von (12.19))}$$

$$\Phi_2 \, r_1 + \Phi_1 \, r_2 = 0 \quad \text{(6. Zeile von (12.19))} \; .$$

Damit erhält man als Knickdeterminante:

$$\Phi_1^2 - \Phi_2^2 = 0$$

$$\text{oder} \quad (\Phi_1 - \Phi_2)(\Phi_1 + \Phi_2) = 0 \; . \qquad (12.26)$$

Durch Einsetzen von (12.13) ergibt sich:

$$(2 \sin\kappa\ell - \kappa\ell - \kappa\ell \cos\kappa\ell)(\kappa\ell - \kappa\ell \cos\kappa\ell) = 0 \; .$$

Nullsetzen des ersten Faktors führt zu

$$\kappa\ell = \pi, \; 3\pi, \; 5\pi, \; \dots \quad ;$$

der zweite Faktor liefert die Nullstellen

$$\kappa\ell = 2\pi, \; 4\pi, \; \dots \quad .$$

Der kleinste Wert von $\kappa\ell$ bestimmt mit (12.5) die kritische Last ($\lambda_k F_1 = -\lambda_k R$; $R = 1$):

$$\lambda_k = \frac{EI\pi^2}{\ell^2} \quad \text{(Eulerstab 2)} \; .$$

Der erste Eulerstab besitzt dieselbe kritische Last wie ein Eulerstab 2 der Länge $2\ell_i$ (Bild 12.9 (b)):

$$\lambda_k = \frac{EI\pi^2}{4\ell^2} \quad \text{(Eulerstab 1)} \; .$$

Für den Eulerstab 3 erhält man die Knickbedingung:

$$\Phi_1 = 0$$

$$\text{oder} \quad \tan\kappa\ell = \kappa\ell \, , \tag{12.27}$$

mit der Lösung

$$\lambda_k \approx 2{,}04 \, \frac{EI\pi^2}{\ell^2} \quad \text{(Eulerstab 3)} \, .$$

Für den Eulerstab 4 erhält man die Knickbedingung:

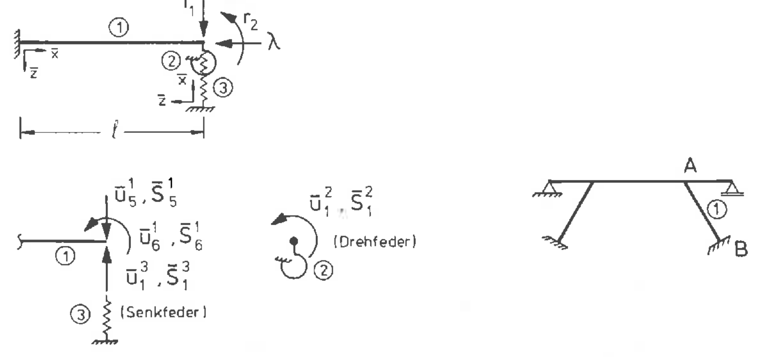
$$2\kappa(1-\cos\kappa\ell)-\kappa^2\ell\sin\kappa\ell=0$$

mit der Lösung

$$\kappa\ell = 2\pi \quad \text{und}$$

$$\lambda_k = \frac{4EI\pi^2}{\ell^2} \quad \text{(Eulerstab 4)} \, .$$

Die Lösung von Knickproblemen nach der Determinantenmethode erfordert - abgesehen von Sonderfällen - einen erheblichen numerischen Aufwand. Die Determinantenmethode erscheint deshalb hauptsächlich für Probleme geeignet, deren Lösung als Schranken für größere Probleme verwendet werden können. In diesen Fällen ist eine parametrische Lösung erforderlich. Ein Beispiel hierfür ist der Stab mit Federlagerung (Bild 12.10).



(a) federgelagerter Stab (b) Ersatzstab im Gesamttragwerk

Bild 12.10 Ersatzstab mit Federlagerung

Die Verschiebungen und Verdrehungen des Punktes A im Ersatzsystem können abgeschätzt werden; mit einer parametrischen Lösung des Ersatzstabes kann dann näherungsweise der Stabilitätsnachweis des Stabes A - B (Bild 12.10 (b)) geführt werden (nicht der Nachweis des Gesamtsystemes).
Im folgenden Beispiel wird die Lösung für den federgelagerten Stab angegeben.

Beispiel 12.2:
Berechnung der Knicklast eines federgelagerten Stabes (Bild 12.10 (a)). Das System besteht aus drei Elementen:

- einem Stabelement mit der Querschnittsfläche A, der Länge ℓ und dem Trägheitsmoment I,
- einer Senkfeder mit der Federsteifigkeit c_w,
- einer Drehfeder mit der Federsteifigkeit c_φ.

Für die Stabendkräfte (Bild 12.10 (a)) gilt:

$$\bar{S}_1^2 = c_\varphi \, \bar{u}_1^2 \ ,$$

$$\bar{S}_1^3 = c_w \, \bar{u}_1^3 \ .$$

Die Steifigkeitsmatrix des Stabelementes ist bekannt (12.19). Normalkraftverformungen werden vernachlässigt. Mit der direkten Steifigkeitsmethode erhält man:

$$\det \begin{vmatrix} \bar{\Phi}_1 + c_w & \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_2 & \Phi_1 + c_\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Dies ergibt mit $\lambda F_1 = -\lambda R$, $R = 1$ die folgende Knickbedingung:

$$\det(\underline{K}(\lambda)) = (2(\Phi_1+\Phi_2) - \lambda\ell + \ell^2 c_w)(\Phi_1+c_\varphi) - (\Phi_1+\Phi_2)^2 \equiv 0. \qquad (12.28)$$

Bild 12.11 gibt eine graphische Darstellung der Funktion $\det(\underline{K}(\lambda))$ für verschiedene Federsteifigkeiten c_w. Als Null-

stellen von det($\underline{K}(\lambda)$) erhält man (ℓ = 1, c_φ = 1, EI = 1):

λ_k	c_w
12,1	10
18,3	20
20,8	30

λ_k ist die kritische Belastung (R = 1). Bemessungskurven für dasselbe Beispiel findet man in /64/.

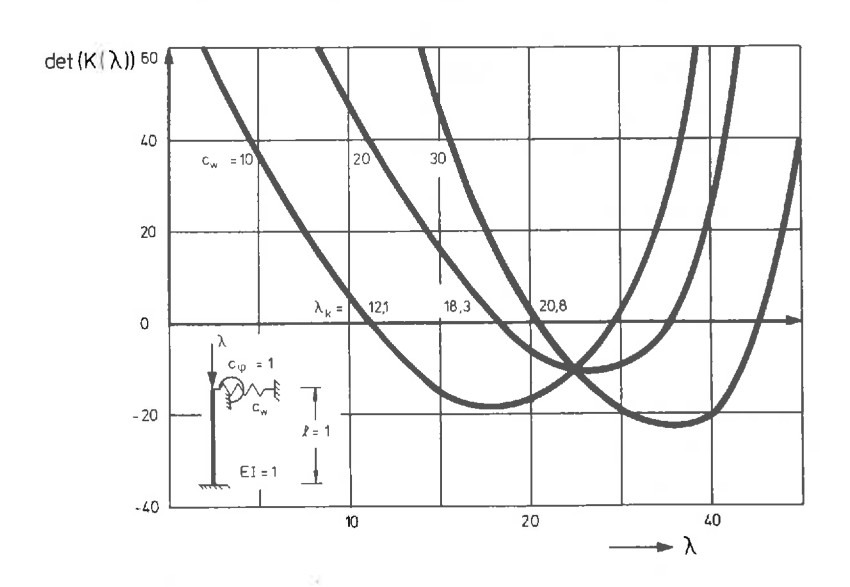


Bild 12.11 Knickbedingung des federgelagerten Stabes

12.4 Die geometrische Steifigkeitsmatrix

Im folgenden wird eine linearisierte Knicklastberechnung dargestellt, die von einer linearen Approximation des Nachbarzustandes auf Elementebene ausgeht. Diese Approximation führt zu der *geometrischen Steifigkeitsmatrix*.

Die Ableitung der geometrischen Steifigkeitsmatrix erfolgt in diesem Abschnitt ausgehend von der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix des Stabelementes (12.19). Dieser Weg ist ungewöhnlich und in der vorliegenden Form auch sonst nicht zu finden. Auf diesem relativ umständlichen Weg wird der Zusammenhang zwischen der Determinantenmethode und dem heute allgemein üblichen Lösungsweg über den Satz von Castigliano verdeutlicht. In Kapitel 13 wird dieselbe geometrische Steifigkeitsmatrix auf diesem zweiten, auch für andere Elemente anwendbaren, Weg gezeigt. Ausgangsgleichung für die folgende Ableitung ist (12.19):

$$\underline{\bar{S}}^i = \underline{\bar{k}}_F^i(\lambda F_1^i)\ \underline{\bar{u}}^i \ . \qquad (12.29)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{\bar{k}}_F^i$ ist eine *transzendente Funktion* der Normalkräfte F_1^i. Die Verteilung der Normalkräfte wird wie in Abschnitt 12.3 als bekannt vorausgesetzt, d.h. im Element ⓘ ist F_1^i bis auf einen skalaren Faktor λ bestimmt. Damit können wir annehmen, (12.29) sei in folgender Form dargestellt:

$$\underline{\bar{S}}^i = \underline{\bar{k}}_F^i(\lambda)\ \underline{\bar{u}}^i \ . \qquad (12.30)$$

Die Elementnumerierung wird zur Vereinfachung der Schreibweise zunächst weggelassen.
Wir entwickeln (12.30) in eine Taylorreihe um einem Ausgangswert λ_o:

$$\underline{\bar{S}} = \underline{\bar{k}}_F(\lambda_o)\underline{\bar{u}} + (\lambda - \lambda_o)\ \frac{d}{d\lambda}\ \{\underline{\bar{k}}_F(\lambda_o)\}\ \underline{\bar{u}} + \text{Restglied} \ . \qquad (12.31)$$

Im Sinne einer linearen Approximation vernachlässigen wir das Restglied.
Für den ersten Summanden in (12.31) ist der Grenzwert $\underline{\bar{k}}_e^i$ für $\lambda_o \rightarrow 0$ bekannt (vgl. (12.23)): Man erhält die Matrix $\underline{\bar{k}}_e^i$ auch, wenn man die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_r^i$ aus Abschnitt 6.1 und Anhang A3 auf die vollständigen Vektoren der Stabendkräfte und Stabendverformungen transformiert:

$$\underline{\bar{k}}_e^i = \underline{T}^i\ \underline{k}_r^i\ (\underline{T}^i)^T.$$

$$\lim_{\lambda_0 \to 0} \bar{\underline{k}}_F(\lambda_0) \equiv \bar{\underline{k}}_e^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & -12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ & & 4EI/\ell & 0 & 6EI/\ell^2 & 2EI/\ell \\ \hline & & & EA/\ell & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 \\ & & & & & 4EI/\ell \end{array}\right] \qquad (12.32)$$

Auf globale Koordinaten transformiert ist $\underline{k}_e^i$ mit der in Abschnitt 6.2 (vgl. (6.9)) und Anhang A3 berechneten Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}^i$ identisch.

Für den Grenzübergang $\lambda_0 \to 0$ des zweiten Summanden muß die Ableitung

$$\frac{d}{d\lambda}\{\bar{\underline{k}}_F(\lambda_0)\}$$

berechnet werden.

Die Elemente der geometrischen Steifigkeitsmatrix erhält man zu:

$$\bar{\underline{k}}_g^i = \lambda \lim_{\lambda_0 \to 0} \frac{d}{d\lambda}\{\bar{\underline{k}}_F(\lambda_0)\} \qquad (12.33)$$

Die Berechnung der Grenzwerte der Ableitungen von $\bar{\underline{k}}_F^i(\lambda)$ erfordert einen erheblichen Rechenaufwand. Im wesentlichen sind folgende Grenzwerte zu berechnen (vgl. (12.13), (12.5)):

$$\lim_{\lambda_0 \to 0} \frac{d\Phi_1(\lambda_0)}{d\lambda} \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda_0 \to 0} \frac{d\Phi_2(\lambda_0)}{d\lambda} \qquad (12.34)$$

$$\text{mit } \Phi_1 = \Phi_1(\kappa)\,, \quad \Phi_2 = \Phi_2(\kappa)$$

$$\text{und } \kappa = \sqrt{-\lambda F_1/EI}\,.$$

Für die Berechnung mit der Regel von l'Hospital sind die Ableitungen der Zählerfunktionen (Z_1 und Z_2) und der gemeinsamen Nennerfunktion (N) zu bilden; es ist:

$$\left(-\frac{1}{F_1\ell}\right) Z_1 = (\sin x - x\cos x + x^2 \sin x)(2 - 2\cos x - x\sin x) - x(\sin x - x\cos x)^2\,,$$

$$\left(-\frac{1}{F_1\ell}\right) Z_2 = (2x - \sin x - x\cos x)(2 - 2\cos x - x\sin x) - (x^2 - x\sin x)(\sin x - x\cos x) \;,$$

$$N = 2x(2 - 2\cos x - x\sin x)^2$$

$$\text{mit} \quad x \equiv \kappa\ell \;.$$

Zähler- und Nennerfunktion sind bis zur i-ten Ableitung an der Stelle Null zu berechnen. Für i = 9 ergibt sich erstmalig kein unbestimmter Ausdruck der Form (0/0).
Die neunten Ableitungen sind:

$$\left(-\frac{1}{F_1\ell}\right)\frac{d^9 Z_1}{dx^9} = 2(128x^2\cos x^2 + x^2\cos x - 128x^2\sin x^2 + 1280x\cos x\sin x + 19x\sin x - 256\cos x^2 - 80\cos x + 256\sin x^2) \;,$$

$$\left(-\frac{1}{F_1\ell}\right)\frac{d^9 Z_2}{dx^9} = -x^3\sin x + 24x^2\cos x + 168x\sin x + 512\cos x^2 - 344\cos x - 512\sin x^2 \;,$$

$$\frac{d^9 N}{dx^9} = 8(128x^3\cos x\sin x - 608x^2\cos x^2 - x^2\cos x + 608x^2\sin x^2 - 2816x\cos x\sin x - 16x\sin x + 576\cos x^2 + 54\cos x - 576\sin x^2) \;.$$

Für x = 0 erhält man:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Z_1}{N} = \frac{2}{15}F_1\ell \quad \text{und}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Z_2}{N} = -\frac{1}{30}F_1\ell \;.$$

Die Ableitungen wurden mit einem Rechenprogramm (LISP) berechnet, das eine *symbolische Differentiation* durchführt. Mit diesem Ergebnis kann die geometrische Steifigkeitsmatrix angegeben werden.

Geometrische Steifigkeitsmatrix in lokalen Koordinaten:

$$\bar{\underline{k}}_g^i = F_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/(5\ell) & -1/10 & 0 & -6/(5\ell) & -1/10 \\ & & 2\ell/15 & 0 & 1/10 & -\ell/30 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & 6/(5\ell) & 1/10 \\ & & & & & 2\ell/15 \end{array}\right] \tag{12.35}$$

Wie in Abschnitt 12.2 (Gleichung (12.21)) transformieren wir auch die geometrische Steifigkeitsmatrix auf globale Koordinaten. Dies ergibt:

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1}{30\ell} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 36s^2 & -36sc & 3s\ell & -36s^2 & 36sc & 3s\ell \\ & 36c^2 & -3c\ell & 36sc & -36c^2 & -3c\ell \\ & & 4\ell^2 & -3s\ell & 3c\ell & -\ell^2 \\ \hline & & & 36s^2 & -36sc & -3s\ell \\ & \text{symmetrisch} & & & 36c^2 & 3c\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{array}\right] \tag{12.36}$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \,,$$
$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i \,.$$

Damit sind die linearen Approximationen der nichtlinearen Elementsteifigkeitsmatrix des Stabelementes und der Stabendkräfte $\underline{S}^i(\lambda)$ bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{k}_F^i(\lambda) &= \underline{k}_e^i + \lambda\, \underline{k}_g^i \\ \text{und} \quad \underline{S}^i(\lambda) &= \underline{k}_e^i\, \underline{u}^i + \lambda\, \underline{k}_g^i\, \underline{u}^i \,. \end{aligned} \tag{12.37}$$

12.5 Das Eigenwertproblem der Knickung von Stabtragwerken

Mit den bekannten Steifigkeitsbeziehungen (12.37) kann nun

die Gesamtsteifigkeit des Tragwerkes in einem benachbarten Verformungszustand berechnet werden.

Wir bezeichnen mit

$\underline{K}^e$ die lineare Gesamtsteifigkeitsmatrix des Tragwerkes, die mit $\underline{K}$ (Kapitel 6) identisch ist,

$\underline{K}^g$ die geometrische Gesamtsteifigkeitsmatrix des Tragwerkes; sie wird mit $\underline{k}_g^i$ (12.36) aufgestellt.

Die Berechnung beider Matrizen, $\underline{K}^e$ und $\underline{K}^g$, erfolgt mit der aus Kapitel 6 bekannten direkten Steifigkeitsmethode.

Für äußere Lasten $\lambda\underline{R}$ gilt:

$$(\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g)\ \underline{r} = \lambda\underline{R}\ . \qquad (12.38)$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten folgt (vgl. auch Satz 12.1):

Satz 12.2: *Ein Tragwerk ist dann instabil, wenn es eine virtuelle Verformung* $\hat{r} \neq 0$ *gibt, für welche die Arbeit der äußeren Lasten verschwindet:*

$$\hat{\underline{r}}^T(\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g)\ \underline{r} = \lambda\ \hat{\underline{r}}^T\ \underline{R} \equiv 0\ . \qquad (12.39)$$

Wegen $\hat{\underline{r}} \neq \underline{0}$ folgt

$$(\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g)\ \underline{r} = \underline{0}\ , \qquad (12.40)$$

die *Grundgleichung der linearen Stabilitätstheorie.*

Gleichungen der Form (12.40) beschreiben ein *allgemeines Eigenwertproblem* (/95/, Anhang A2.2).

Für $[n \times n]$-Matrizen $\underline{K}^e$ und $\underline{K}^g$ gibt es im allgemeinen n Lösungen

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die Eigenwerte von (12.40),

und n Vektoren

$\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n$, die den Eigenwerten zugeordneten Eigenvektoren.

Aus der Ableitung erkennt man unmittelbar die Gültigkeit von Satz 12.3.

Satz 12.3: *Der kleinste (positive) Eigenwert* $\lambda = \lambda_k$ *der Grundgleichung der linearen Stabilitätstheorie*

$$(\underline{K}^e + \lambda\,\underline{K}^g)\,\underline{r} = \underline{0}$$

bestimmt die kritische Belastung

$$\underline{R}_k = \lambda \underline{R} \tag{12.41}$$

des Tragwerkes.

Die Lösung des *allgemeinen Eigenwertproblems* ist mit dem wiederholten Lösen eines linearen Gleichungssystems verbunden. Die Lösung eines *speziellen Eigenwertproblems* (Anhang A2.2.1) erfordert hingegen diesen Aufwand nicht. Im Anhang A2.2.1 wird die Transformation des allgemeinen auf das spezielle Eigenwertproblem gezeigt. Wir stellen diese Transformation hier zusammengefaßt dar: In (12.40)

$$(\underline{K}^e + \lambda\,\underline{K}^g)\,\underline{r} = \underline{0}$$

ist $\underline{K}^e$ positiv definit. Mit dem Cholesky-Verfahren (Anhang A2.1.4) zerlegen wir die Matrix $\underline{K}^e$ in $\underline{L}$ und $\underline{L}^T$ und substituieren $\underline{L}^T\,\underline{r}$ durch $\tilde{\underline{r}}$. Durch Inversion von $\underline{L}$ und Linksmultiplikation mit $\underline{L}^{-1}$ erhält man das *spezielle Eigenwertproblem*

$$(\tilde{\underline{K}} - \Lambda\,\underline{I})\,\tilde{\underline{r}} = 0 \tag{12.42}$$

mit $\underline{K}^e = \underline{L}\,\underline{L}^T$,

$$\tilde{\underline{K}} = \underline{L}^{-1}\,\underline{K}^g\,(\underline{L}^{-1})^T \tag{12.43}$$

und $\Lambda = -1/\lambda$.

Die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\underline{r}$ von (12.40) erhält man aus den Eigenwerten Λ und Eigenvektoren $\tilde{\underline{r}}$ von (12.42) folgendermaßen:

$$\lambda = -1/\Lambda \quad \text{und} \quad \underline{r} = (\underline{L}^{-1})^T\,\tilde{\underline{r}} \,. \tag{12.44}$$

Wir erläutern nun den Zusammenhang zwischen der Lösung von (12.40) und der Determinantenmethode: Die Eigenwerte λ_i

stimmen mit den Nullstellen der Determinante

$$\det(\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g)$$

überein. Die Determinante ist ein Polynom n-ter Ordnung in λ, welches die Determinante des nichtlinearen Problems (Abschnitt 12.2) approximiert. Wir zeigen das an einem einfachen Beispiel, dem federgelagerten Stab (vgl. Beispiel 12.2).

Beispiel 12.3:
Für den federgelagerten Stab nach Bild 12.10 wird die Determinante der Matrizen $\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g$ aufgestellt und deren erste Nullstelle $\lambda_{min} = \lambda_k$ bestimmt.
Die Determinante erhält man aus den Elementsteifigkeitsmatrizen. Für

$$EI = 1\ ,\quad \ell = 1\ ,\quad c_w = 10\ ,\quad c_\varphi = 1 \quad \text{und} \quad R = 1$$

ergibt sich die Knickbedingung:

$$\det \begin{vmatrix} 22 - \frac{6}{5}\lambda & 6 - \frac{1}{10}\lambda \\ 6 - \frac{1}{10}\lambda & 5 - \frac{2}{15}\lambda \end{vmatrix} = 0\ .$$

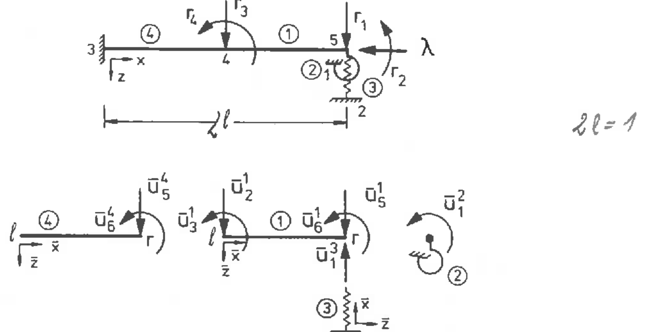


Bild 12.12 Federgelagerter Stab mit zwei Stabelementen

Es ist dies ein Polynom 2. Ordnung (Parabel):

$$\lambda^2 - 51{,}55\,\lambda + 493{,}33 = 0$$

mit der Lösung

$$\lambda_k = 12{,}7\ .$$

Im Vergleich zu der Lösung aus Beispiel 12.2 ($\lambda_k = 12{,}1$) ergibt sich ein relativer Fehler von ca. 5 %.

Eine genauere Lösung erhält man durch Unterteilung des Stabelementes (Bild 12.12).

Für diesen Fall erhält man die Knickbedingung in allgemeiner Form zu:

$$\det\left|\begin{array}{cc|cc}
\frac{12EI}{\ell^3} + c_w - \frac{6\lambda}{5\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} - \frac{\lambda}{10} & -\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{6\lambda}{5\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} + \frac{\lambda}{10} \\
\frac{6EI}{\ell^2} - \frac{\lambda}{10} & \frac{4EI}{\ell} + c_\varphi - \frac{2\ell\lambda}{15} & \frac{6EI}{\ell^2} - \frac{\lambda}{10} & \frac{2EI}{\ell} + \frac{\ell\lambda}{30} \\
\hline
-\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{6\lambda}{5\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} - \frac{\lambda}{10} & \frac{24EI}{\ell^3} - \frac{12\lambda}{5\ell} & 0 \\
-\frac{6EI}{\ell^2} + \frac{\lambda}{10} & \frac{2EI}{\ell} + \frac{\ell\lambda}{30} & 0 & \frac{8EI}{\ell} - \frac{4\ell\lambda}{15}
\end{array}\right| = 0$$

Die Lösung wurde für alle in Bild 12.11 dargestellten Fälle als erste Nullstelle der zugehörigen Polynome 4. Ordnung berechnet (Tafel 12.1).

c_w	Näherung	Exakt	rel. Fehler %
10	12,1	12,1	< 0,1
20	18,3	18,3	< 0,1
30	21,1	20,8	1,4

Tafel 12.1 Vergleich der linearen und nichtlinearen Eigenwertberechnung

Bei größeren Problemen ($n > 3$) wird man λ_k mit den bekannten Verfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen berechnen /88/. Da nur der kleinste Eigenwert von Interesse ist, können spezielle Verfahren der Eigenwertberechnung angewendet werden. Wir beschränken uns hier auf die Anwendung eines

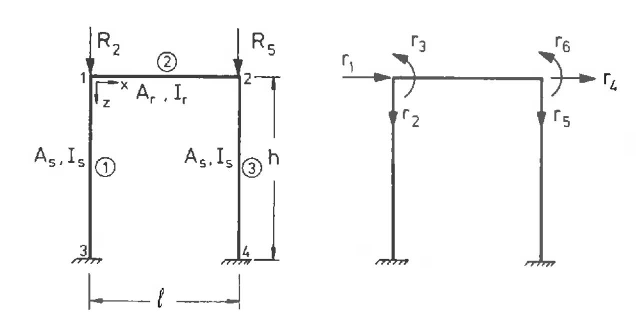


Bild 12.13 Knickbedingung eines Einfeldrahmens

speziellen Verfahrens, des Iterationsverfahrens von R. von Mises (vgl. Anhang A2.2.3).

Beispiel 12.4:

Für den Einfeldrahmen (Bild 12.13) wird die Knicklast nach dem von Mises'schen Iterationsverfahren berechnet. Die Berechnung erfolgt für verschiedene Stiellängen h, für zwei Lastverhältnisse, $R_2 = R_5$ und $R_5 = 0{,}5\ R_2$, und für mehrere Steifigkeitsverhältnisse I_r/I_s. Es wird ein Vergleich mit den Näherungslösungen nach DIN 4114 (Blatt 1, Ausgabe Juli 1952) durchgeführt.

Näherungsweise können für den Ausgangszustand die Druckkräfte in den Stielen den äußeren Lasten R_2 und R_5 gleichgesetzt werden; die Normalkraft im Riegel ist Null.

Man erhält damit folgende Steifigkeitsmatrizen:

(a) Die geometrische Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^g_{6\times 6}$

$$\underline{K}^g = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\hline
-\frac{6}{5h}|R_2| & 0 & -\frac{1}{10}|R_2| & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 & & -\frac{2h}{15}|R_2| & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
 & & & -\frac{6}{5h}|R_5| & 0 & -\frac{1}{10}|R_5| & 4 \\
 & \text{symmetrisch} & & & 0 & 0 & 5 \\
 & & & & & -\frac{2h}{15}|R_5| & 6
\end{array}$$

(b) Die lineare Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^{e}_{6\times 6}$

$$\underline{K}^{e} = EI_s \left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
\frac{12}{h^3} + \frac{IA_r}{\ell I_r} & 0 & \frac{6}{h^2} & -\frac{IA_r}{\ell I_r} & 0 & 0 & 1 \\
 & \frac{A_s}{hI_s} + \frac{12I}{\ell^3} & -\frac{6I}{\ell^2} & 0 & -\frac{12I}{\ell^3} & -\frac{6I}{\ell^2} & 2 \\
 & & \frac{4}{h} + \frac{4I}{\ell} & 0 & \frac{6I}{\ell^2} & \frac{2I}{\ell} & 3 \\
\hline
 & & & \frac{12}{h^3} + \frac{IA_r}{\ell I_r} & 0 & \frac{6}{h^2} & 4 \\
 & \text{symmetrisch} & & & \frac{12I}{\ell^3} + \frac{A_s}{hI_s} & \frac{6I}{\ell^2} & 5 \\
 & & & & & \frac{4}{h} + \frac{4I}{\ell} & 6
\end{array}\right]$$

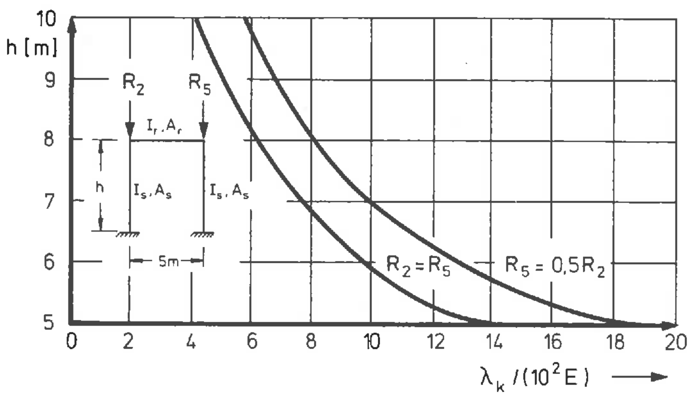
Steifigkeitsverhältnis $I = I_r/I_s$

Für die Iteration nach von Mises wird die Grundgleichung umgeformt:

$$(\underline{K}^{g} - \Lambda\, \underline{K}^{e})\, \underline{r} = \underline{0}$$

$$\text{mit} \quad \Lambda = -1/\lambda\ .$$

Gesucht ist damit der größte Eigenwert Λ, der den kleinsten Wert von λ bestimmt ($\underline{K}^{e}$ ist positiv definit). Die iterative Bestimmung von Λ erfolgt nach dem von Mises'schen Iterationsverfahren, das im Anhang A2.2.3 detailliert dargestellt ist. Die Iterationsvorschriften sind einfach programmierbar. Für die Berechnung wurde ein Programm erstellt. Die Ergebnisse der iterativen Berechnung mit verschiedenen Parametern sind in Bild 12.14 dargestellt.
Für einen relativen Fehler von ca. 0,1 % waren durchschnittlich vier Iterationsschritte erforderlich. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt nur unwesentlich vom Startpunkt ab.
Das vorliegende Beispiel ist nach DIN 4114 (Blatt 1, Ausgabe Juli 1952) gewählt. Die Ergebnisse werden mit der Lösung verglichen, die dort angegeben ist (siehe Tafel 12.2).



$$I_s = I_r = 0,5 \cdot 10^{-4}\ m^4 , \quad A_s = A_r = 0,5 \cdot 10^{-2}\ m^2$$

Bild 12.14 Ergebnisse der Knickberechnung

ℓ = 5,0 m						
R_5 / R_2	Höhe h m	I_s 10^{-4} m^4	I_r 10^{-4} m^4	Eigenwert +) (Knicklast)	Näherung +) DIN 4114	rel. Fehler
	5,0	0,5	0,5	14,850	14,770	0,54
1,0	6,0	⋮	⋮	10,760	10,680	0,74
	7,0			8,155	8,093	0,76
	8,0			6,399	6,345	0,84
1,0	9,0			5,157	5,109	0,93
	10,0			4,245	4,204	0,97
	5,0			19,800	19,700	0,51
0,5	6,0			14,340	14,250	0,63
	7,0			10,870	10,790	0,74
	8,0			8,529	8,460	0,81
1,0	9,0			6,873	6,813	0,87
	10,0	0,5	0,5	5,658	5,605	0,94
	5,0	0,1	0,1	2,971	2,955	0,54
1,0	⋮	0,2	⋮	4,861	4,830	0,64
		0,3		6,340	6,235	1,66
		0,4		7,632	7,414	2,86
		0,5		8,827	8,484	3,89
		0,6		9,966	9,515	4,53
		0,7		11,070	10,560	4,61
1,0		0,8		12,150	11,640	4,20
	5,0	0,9	0,1	13,210	12,810	3,03

Die mit +) gekennzeichneten Spalten sind mit 10^{-4} zu multiplizieren.

Tafel 12.2 Vergleich mit der Näherung nach DIN 4114 (Blatt 1, Ausgabe Juli 1952)

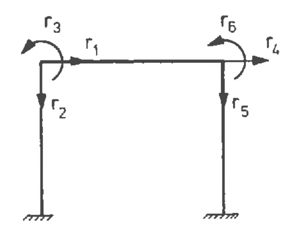
Die Übereinstimmung beider Näherungslösungen ist relativ gut. Eine genaue Aussage über den tatsächlichen Fehler ist nicht möglich, da es sich bei beiden Verfahren um Näherungen handelt.

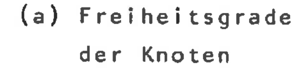
12.6 Die Bedeutung der Eigenvektoren

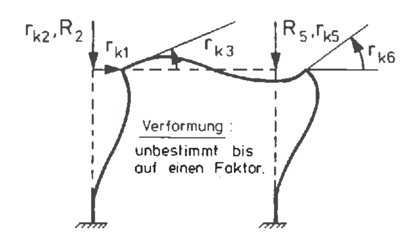
Für einen Stabilitätsnachweis genügt üblicherweise die Berechnung des kleinsten Eigenwertes von

$$(\underline{K}^e + \lambda\ \underline{K}^g)\ \underline{r} = \underline{0}\ .$$

Beim Iterationsverfahren nach von Mises wird zugleich der zugehörige Eigenvektor berechnet.
Die Kenntnis des zu λ_k gehörigen Eigenvektors $\underline{r}_k$ gibt ein *qualitatives* Bild vom benachbarten Verformungszustand. Man erkennt dies aufgrund der Ableitung des Eigenwertproblemes (12.38):
Die Komponenten von $\underline{r}_k$ *sind die Komponenten der Knotenverformung des benachbarten Verformungszustandes* (Bild 12.15).




(a) Freiheitsgrade der Knoten



(b) Komponenten des Eigenvektors $\underline{r}_k$

Bild 12.15 Komponenten des Eigenvektors $\underline{r}_k$

Die Komponenten von $\underline{r}_k$ besitzen die dem Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrizen zugrunde liegende Anordnung. Nach Berechnung von $\underline{r}_k$ kann damit die "Verformung" der einzelnen Stabelemente berechnet werden. Diese Berechnung wird wie

die Verformungsberechnung (Abschnitt 5.4) durchgeführt. Die Größe der Verformungen ist jedoch, wie bei den Eulerstäben (Beispiel 12.1), bis auf einen Faktor unbestimmt.
Damit ist die lineare Stabilitätsberechnung von Stabwerken bekannt. Es folgt eine

Zusammenfassung der Berechnung der kritischen Belastung mit den zugehörigen Knickfiguren:

(1) Besetzung der elastischen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^e$ und des Lastvektors $\underline{R}$;

(2) Berechnung der Normalkräfte F_1^i in den einzelnen Elementen nach dem in Kapitel 6 dargestellten Weggrößenverfahren;

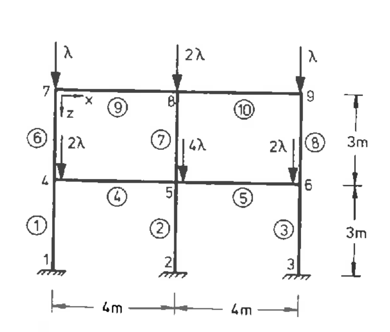
(3) Besetzung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^g$;

(4) Transformation des allgemeinen auf das spezielle Eigenwertproblem nach Gleichung (12.42) und (12.43);

(5) Lösung des speziellen Eigenwertproblems und Ermittlung der gewünschten Eigenwerte und Eigenvektoren;

(6) Rücktransformation der Eigenwerte und Eigenvektoren nach Gleichung (12.44).

Die Berechnung mit SMIS wird an einem Beispiel gezeigt.



$E = 2{,}1 \cdot 10^8 \; kN/m^2$

Stiele: IPB 300

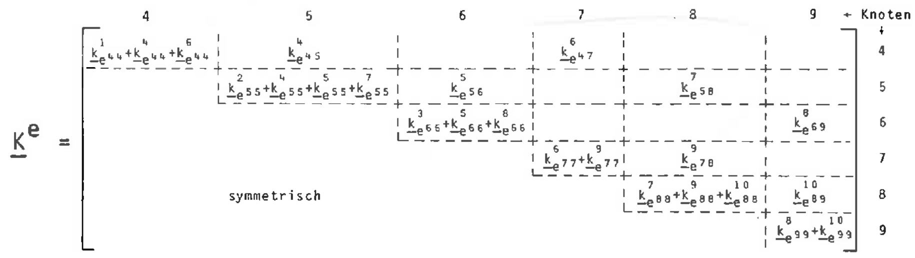
Riegel: IPB 200

Bild 12.16 Rahmen

Beispiel 12.5:

Für den Rahmen von Bild 12.16 wird die kritische Last be-

rechnet. Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^e$ wird mit der in Abschnitt 6.3 beschriebenen Variante der direkten Steifigkeitsmethode aufgestellt:



Die Elementsteifigkeitsmatrix der Elemente ①, ②, ③, ⑥, ⑦ und ⑧ ist mit cos α = 0 und sin α = -1:

$$\underline{k}_e^i = 35238 \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & -1 & -0,667 & 0 & -1 \\ & 29,599 & 0 & 0 & -29,599 & 0 \\ & & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0,667 & 0 & 1 \\ & \text{symmetrisch} & & & 29,599 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Dimension [kN, m]

und für die Elemente ④, ⑤, ⑨ und ⑩ ist mit cos α = 1 und sin α = 0:

$$\underline{k}_e^i = 5985 \begin{bmatrix} 68,509 & 0 & 0 & -68,509 & 0 & 0 \\ & 0,375 & -0,75 & 0 & -0,375 & -0,75 \\ & & 2 & 0 & 0,750 & 1 \\ & & & 68,509 & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & 0,375 & 0,75 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Dimension [kN, m]

Mit dem Lastvektor

$$\underline{R}^T = [0\ 2\ 0 \,\vdots\, 0\ 4\ 0 \,\vdots\, 0\ 2\ 0 \,\vdots\, 0\ 1\ 0 \,\vdots\, 0\ 2\ 0 \,\vdots\, 0\ 1\ 0]\ \lambda$$

können in einer linearen Berechnung nach Kapitel 6 die Knotenverformungen $\underline{r}$ und die Normalkräfte F_1^i mit SMIS berechnet werden:

$$F_1^1 = -3{,}013\ \lambda \approx -3\ \lambda\ , \qquad F_1^6 = -1{,}007\ \lambda \approx -\lambda$$
$$F_1^2 = -5{,}979\ \lambda \approx -6\ \lambda\ , \qquad F_1^7 = -1{,}989\ \lambda \approx -2\ \lambda$$
$$F_1^3 = -3{,}007\ \lambda \approx -3\ \lambda\ , \qquad F_1^8 = -1{,}004\ \lambda \approx -\lambda$$
$$F_1^4 \approx 0\ , \qquad F_1^9 \approx 0$$
$$F_1^5 \approx 0\ , \qquad F_1^{10} \approx 0\ .$$

Nimmt man für die Normalkräfte die gerundeten Werte, so sind die Elemente ④, ⑤, ⑨ und ⑩ normalkraftfrei, und die geometrische Steifigkeitsmatrix wird nur von den Elementen der Stiele gebildet:

$$\underline{K}^g = \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & \quad 5 & \quad 6 & \quad 7 & \quad 8 & \quad 9 \leftarrow \text{Knoten} \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} \underline{k}_{g44}^{1}+\underline{k}_{g44}^{6} & 0 & 0 & \underline{k}_{g47}^{6} & 0 & 0 \\ & \underline{k}_{g55}^{2}+\underline{k}_{g55}^{7} & 0 & 0 & \underline{k}_{g58}^{7} & 0 \\ & & \underline{k}_{g66}^{3}+\underline{k}_{g66}^{8} & 0 & 0 & \underline{k}_{g69}^{8} \\ & & & \underline{k}_{g77}^{6} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & \underline{k}_{g88}^{7} & 0 \\ & & & & & \underline{k}_{g99}^{8} \end{matrix}\right] \begin{matrix} \downarrow \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

Für die Elemente ①, ②, ③, ⑥, ⑦ und ⑧ ist die geometrische Steifigkeitsmatrix:

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1^i}{10} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & & & 4 & 0 & -1 \\ & \text{symmetrisch} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 4 \end{array}\right]$$

Für die Lösung des Eigenwertproblems verwenden wir SMIS /37/. In SMIS wird das Jakobi-Verfahren /95/ zur Berechnung der Eigenwerte und der Eigenvektoren benutzt. Es kann nur das spezielle Eigenwertproblem gelöst werden.

Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt:

```
LOAD     F1 = KE     N1 = 18     N2 = 18
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der elastischen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^e$.

```
LOAD     F1 = KG     N1 = 18     N2 = 18
  :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^g$.

```
CHOL1    F1 = KE     F2 = LT
```

Es wird die obere Dreiecksmatrix $\underline{L}^T$ der Zerlegung von $\underline{K}^e = \underline{L}\ \underline{L}^T$ berechnet.

```
CHOL3    F1 = LT
```

Es wird die Inverse $(\underline{L}^T)^{-1}$ berechnet.

```
MULT     F1 = KG     F2 = LT     F3 = KGLT
TRMULT   F1 = LT     F2 = KGLT   F3 = KS
```

Es wird $\tilde{\underline{K}} = \underline{L}^{-1}\ \underline{K}^g\ (\underline{L}^{-1})^T$ nach Gleichung (12.43) gebildet.

```
LOAD     F1 = I      N1 = 1      N2 = 18
  :
```

Es folgen 18 Einsen zur Erzeugung der Einheitsmatrix.

```
EIGEN    F1 = KS     F2 = I      F3 = RS     F4 = LAMS   N1 = 2
```

Es werden die beiden größten Eigenwerte Λ und die zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\underline{r}}$ berechnet.

```
INVEL    F1 = LAMS          SCALE    F1 = LAMS    S1 = -1
PRINT    F1 = LAMS
```

Die beiden kleinsten Eigenwerte λ werden berechnet und ausgegeben:

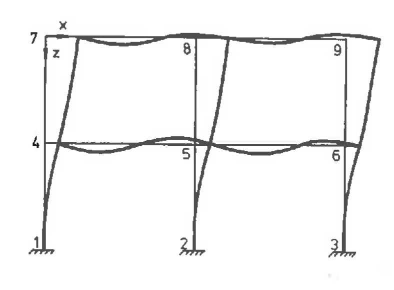
$$\lambda_1 = 5990{,}57 \text{ kN} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 17594{,}36 \text{ kN} .$$

```
TRANS    F1 = RS     F2 = RST
MULT     F1 = LT     F2 = RST    F3 = R
PRINT    F1 = R
```

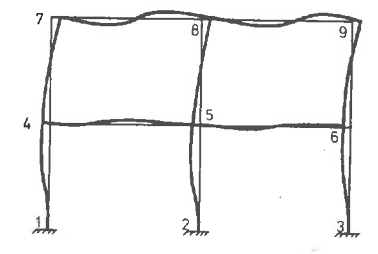
Die Eigenvektoren $\underline{r}$ werden ermittelt und ausgegeben:

$$\underline{r}_{1/2} = \left[\begin{array}{rr} 0{,}500\cdot10^{-2} & -0{,}192\cdot10^{-2} \\ -0{,}302\cdot10^{-4} & -0{,}178\cdot10^{-4} \\ -0{,}217\cdot10^{-2} & -0{,}269\cdot10^{-3} \\ \hdashline 0{,}502\cdot10^{-2} & -0{,}197\cdot10^{-2} \\ 0{,}160\cdot10^{-14} & 0{,}124\cdot10^{-14} \\ -0{,}202\cdot10^{-2} & -0{,}468\cdot10^{-3} \\ \hdashline 0{,}500\cdot10^{-2} & -0{,}192\cdot10^{-2} \\ 0{,}302\cdot10^{-4} & 0{,}178\cdot10^{-4} \\ -0{,}217\cdot10^{-2} & -0{,}269\cdot10^{-3} \\ \hdashline 0{,}111\cdot10^{-1} & 0{,}305\cdot10^{-2} \\ -0{,}425\cdot10^{-4} & -0{,}325\cdot10^{-4} \\ -0{,}159\cdot10^{-2} & -0{,}196\cdot10^{-2} \\ \hdashline 0{,}111\cdot10^{-1} & 0{,}307\cdot10^{-2} \\ 0{,}313\cdot10^{-14} & 0{,}251\cdot10^{-14} \\ -0{,}129\cdot10^{-2} & -0{,}147\cdot10^{-2} \\ \hdashline 0{,}111\cdot10^{-1} & 0{,}305\cdot10^{-2} \\ 0{,}425\cdot10^{-4} & 0{,}325\cdot10^{-4} \\ -0{,}159\cdot10^{-2} & -0{,}196\cdot10^{-2} \end{array}\right] \begin{array}{l} r_{4x} \\ r_{4z} \\ \Theta_4 \\ r_{5x} \\ r_{5z} \\ \Theta_5 \\ r_{6x} \\ r_{6z} \\ \Theta_6 \\ r_{7x} \\ r_{7z} \\ \Theta_7 \\ r_{8x} \\ r_{8z} \\ \Theta_8 \\ r_{9x} \\ r_{9z} \\ \Theta_9 \end{array}$$

In Bild 12.17 sind die qualitativen Knickfiguren dargestellt.



$\lambda_1 = 5990{,}57$ kN

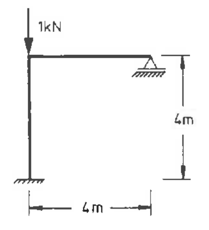


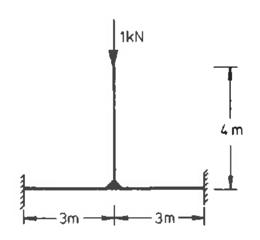
$\lambda_2 = 17594{,}36$ kN

Bild 12.17 Qualitative Knickfiguren

Aufgaben:

12.1 Für die dargestellten Stabwerke ist die nichtlineare Knickdeterminante aufzustellen; der kritische Lastparameter ist näherungsweise zu berechnen.





(a) Einhüftiger Rahmen (b) Stabsystem

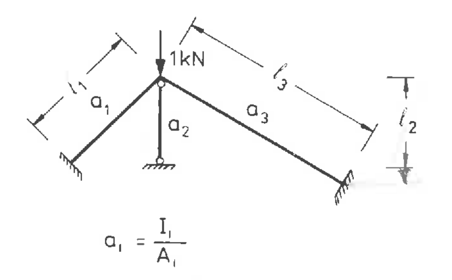
Systemgrößen für (a) und (b): $I = 0{,}1 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$A = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\ m^2$

$E = 2{,}1 \cdot 10^8\ kN/m^2$

Für beide Systeme ist eine obere Schranke anzugeben.

12.2 Für das dargestellte Stabwerk ist die kritische Belastung mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix zu berechnen.



Systemwerte:

$a_1 = I_a,\ \ell_1 = \ell$

$a_2 = 0{,}5\ I_a,\ \ell_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$

$a_3 = 2\ I_a,\ \ell_3 = \frac{3}{2}\ \ell$

Das Ergebnis ist EI_a-fach für $\ell = 1$ darzustellen. Wie wird die Knicklast durch den Fachwerkstab beeinflußt?

12.3 Der Rechengang für das Beispiel 12.4 ist in Form eines Flußdiagrammes darzustellen.

13 Nichtlineare Verformungen ebener Stabwerke im elastischen Bereich

Der Stabilitätsberechnung von Stabwerken wurde lange Zeit eine große praktische Bedeutung zugemessen. Insbesondere im Stahlbau wurden Tragwerke fast nur mit einer Spannungsberechnung (kleine Verformungen) und einer zusätzlichen Stabilitätsberechnung nachgewiesen. Die Annahmen, die einer Stabilitätsberechnung (Kapitel 12) zugrunde liegen, werden jedoch in der Praxis nur in grober Näherung erfüllt:

- es treten große Verformungen mit Kräfteumlagerungen auf,
- die Stabachsen sind nicht ideal gerade, die Stäbe besitzen Vorverformungen und sonstige *Imperfektionen*.

Man ist deshalb in vielen Bereichen des konstruktiven Ingenieurbaus dazu übergegangen, den Einfluß der Verformungen auf das Gleichgewicht der inneren Kräfte zu berücksichtigen.
Die Berechnungsmethoden, die wir in diesem Kapitel darstellen, können z.T. auch auf nicht konservative Belastung übertragen werden. Dies erfordert jedoch zusätzliche Überlegungen, auf die wir hier nicht eingehen können /40/. *Wir setzen damit für alle folgenden Abschnitte konservative Belastung (Bild 12.3) voraus.*

13.1 Nichtlineares Verformungsverhalten

Für das Verständnis der Annahmen, die den folgenden Abschnitten zugrunde liegen, ist es erforderlich, das nichtlineare Verformungsverhalten eines Stabwerkes genauer zu betrachten. Wir wählen hierzu ein Beispiel.
In Bild 13.1 ist ein leichter Hallenbinder mit einem typischen Lastfall skizziert. Das System wurde mit einer Normbelastung in Stahl (St 37) bemessen; für eine λ-fache Normbelastung ist das Verformungsverhalten skizziert.

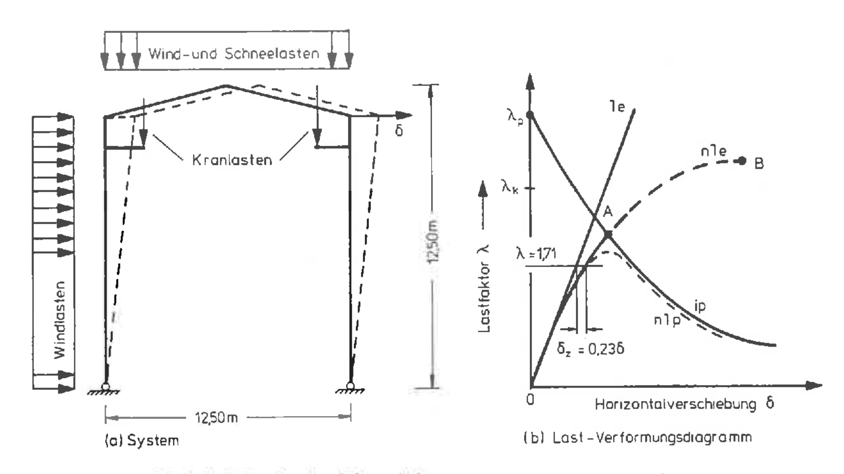


Bild 13.1 Hallenbinder mit Kranbahn

Gegenstand dieses Kapitels ist das *nichtlinear-elastische Verformungsverhalten:* Die Kurve "nle" wird an späterer Stelle für dieses System berechnet. Das linear-elastische Verformungsverhalten "le" ist eine tangentiale Approximation von "nle" im Koordinatenursprung. Bei einem für die Bemessung üblichen Lastfaktor $\lambda = 1,71$ beträgt der nichtlineare Verformungsanteil δ_z an der gesamten Verformung δ ca. 23 %. Die Zusatzmomente in den Rahmenecken, die durch δ_z verursacht werden, besitzen dieselbe Größenordnung (ca. 20 %).

Für den Werkstoff Stahl unterscheidet sich die Proportionalitätsgrenze von der Fließgrenze um etwa 20 %. Es ist deshalb damit zu rechnen, daß bei $\lambda = 1,71$ bleibende (plastische) Verformungen eintreten.

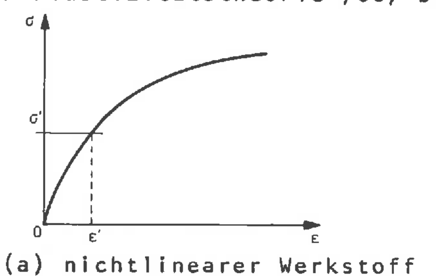
Das weitere Verformungsverhalten unter Berücksichtigung der Plastizierung des Werkstoffes ist mit der Kurve "nlp" (nichtlinear-plastisch) angedeutet. Die Kurve "nlp" wird durch "ip" begrenzt. Mit "ip" wird ein ideal-plastischer Grenzverformungszustand bezeichnet. Der Maximalwert von "ip" ist der Lastfaktor λ_p für ideal-plastisches Werkstoffverhalten (Traglast). Bei schlanken Tragwerken liegt die "Eulerlast" λ_k, der kritische Lastfaktor des Stabilitäts-

problemes, zwischen dem Bemessungsfaktor (λ = 1,71) und dem Traglastfaktor λ_p. Der Einfluß der einsetzenden plastischen Verformungen bei λ = 1,71 wird durch eine Abminderung der zulässigen Spannungen im Nachweis berücksichtigt.
Die Proportionalitätsgrenze besitzt also einen wesentlichen Einfluß auf das Verformungsverhalten: In einem realen Stabwerk liegt üblicherweise die Proportionalitätsgrenze (λ_e, vgl. Bild 12.2) in der Nähe des Lastfaktors für den wir die Bemessung nachweisen (z.B. 1,71 in Bild 13.1). Die ideelle Knicklast (λ_k) muß immer größer sein als die Bemessungslast. *Die ideelle Knicklast nähert sich der Bemessungslast mit wachsender Schlankheit der Stäbe.* Mit wachsender Schlankheit nehmen aber auch die Verformungen überproportional zu, und die Berechnungsannahmen der Stabilitätstheorie werden damit insgesamt in Frage gestellt. Mit Bezug zu Bild 13.1 läßt sich feststellen, daß die nichtlineare Verformungsberechnung höchstens bis zum Erreichen der idealplastischen Grenzlastkurve "ip" (Punkt A) sinnvoll ist. Der Bereich A-B ist nur von theoretischer Bedeutung.
Wir erkennen aus diesem Beispiel, daß jede Einteilung der Ursachen für nichtlineare Verformungen an sich schon eine Idealisierung darstellt. Für eine vereinfachte Berechnung unterscheidet man folgende Idealisierungen des nichtlinearen Tragwerksverhaltens:

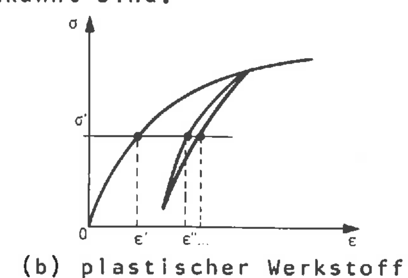
- *Physikalische Nichtlinearität* zur Beschreibung aller Einflüsse eines nichtlinearen Stoffgesetzes,
- *Geometrische Nichtlinearität* zur Beschreibung aller Einflüsse, die sich aus einer nichtlinearen Verträglichkeitsbedingung der Verformungen und Verzerrungen ergeben und die - wie wir schon bei der elastischen Stabilität gesehen haben - auch die Gleichgewichtsbedingungen beeinflussen.

Als physikalische Nichtlinearität wird üblicherweise das plastische Werkstoffverhalten bezeichnet. Im plastischen Werkstoffbereich existiert keine eindeutige Zuordnung zwi-

schen den Spannungen σ und den Dehnungen ε (Bild 13.2). Mit phänomenologisch begründeten Stoffgesetzen können zwar auch physikalisch nichtlineare Probleme gelöst werden (/52/, /81/), die Gültigkeitsgrenzen solcher Lösungen lassen sich jedoch nur dann richtig einschätzen, wenn die Grundlagen der Plastizitätstheorie /68/ bekannt sind.



(a) nichtlinearer Werkstoff



(b) plastischer Werkstoff

Bild 13.2 Physikalisch nichtlineares Werkstoffverhalten

Eine Einführung in die Grundlagen würde den Rahmen dieser Darstellung sprengen; die Rechenmethoden im plastischen Werkstoffbereich würden eine zusätzliche Vertiefung der numerischen Mathematik erfordern. Aus diesen Gründen behalten wir auch im folgenden die *Annahme* der unbeschränkten *Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes* bei.
Die Berechnung von Stabwerken im geometrisch nichtlinearen Bereich erfordert weitere Einschränkungen, die im folgenden Abschnitt näher dargestellt sind.

13.2 Grundlagen der geometrisch nichtlinearen Berechnung

Bei der Ableitung der nichtlinearen Steifigkeitsmatrix (Abschnitt 12.2) haben wir erstmals die Annahme infinitesimaler Formänderungen verlassen: Die Annahmen der elementaren Balkentheorie wurden dort indirekt verletzt und zwar durch die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen in einem "Nachbarzustand" mit endlichen Verformungen jedoch unter Beibehaltung der grundlegenden Differentialgleichungen des Balkenelementes mit infinitesimalen Formänderungen.

Da wir Stabwerke mit endlichen Verformungen nur über Nachbarzustände durch Linearisierung berechnen können, müssen zunächst die oben genannten Vernachlässigungen bei der Ableitung des ersten Nachbarzustandes näher untersucht werden. Hierfür müssen wir die Formänderungen, die zu dem Nachbarzustand führen, exakt beschreiben.

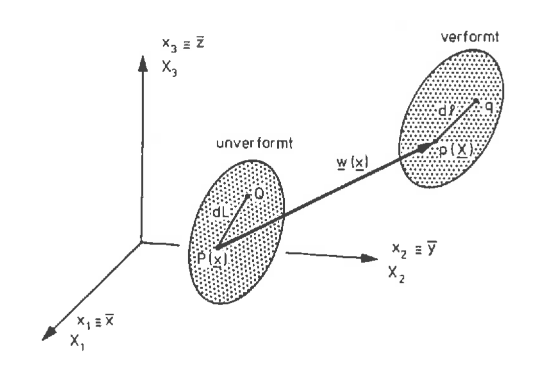


Bild 13.3 Allgemeiner Verformungszustand

Die Dehnungen eines Stabes werden in der Balkentheorie als relative Längenänderungen definiert: Die Dehnung in einem Punkt $P(\underline{x})$ auf einer zu (x_2, x_3) parallelen Ebene in Richtung der x_1-Achse ist:

$$\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{11} = \frac{dL - d\ell}{dL} . \tag{13.1}$$

Die Dehnungen können als Ableitungen einer Verschiebungsfunktion dargestellt werden:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \equiv w_{1,1} \tag{13.2}$$

$w_1(\underline{x})$ ist die Komponente des Verschiebungsfeldes $\underline{w}$ in Richtung von x_1. Wir haben hierbei von der Indexschreibweise Gebrauch gemacht: alle Indizes verweisen auf die Indizes der Koordinatenachsen ($x_1 \equiv \bar{x}$, $x_2 \equiv \bar{y}$, $x_3 \equiv \bar{z}$). Ein Komma kennzeichnet einen Differentialausdruck, z.B. ist

$$w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} .$$

Zusätzlich wird die Summenvereinbarung eingeführt: Zwei gleiche Indizes in einem Produkt werden als Summe über den Bereich (1,2,3) der Indizes aufgefaßt, z.B. ist

$$a_{ij}\, b_j \equiv \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, b_j = a_{i1}\, b_1 + a_{i2}\, b_2 + a_{i3}\, b_3 \;.$$

Die Dehnungen nach (13.1) und (13.2) sind Grundlage der elementaren Balkentheorie und gelten nur für *kleine Formänderungen.* Der benachbarte Verformungszustand wird durch den nichtlinearen Verzerrungstensor beschrieben (Lagrange'scher Verzerrungstensor /80/):

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{(w_{i,j} + w_{j,i})/2}_{\text{linearer,}} + \underbrace{w_{t,i}\, w_{t,j}/2}_{\text{quadratischer Anteil}} \;. \tag{13.3}$$

Unter Beachtung der Indexschreibweise erhält man z.B. für

$$\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2\right\}. \tag{13.4}$$

Die Verformungen $w_1 \equiv u_x$, $w_2 \equiv w_y$ und $w_3 \equiv w_z$ sind in Bezug auf die Koordinaten des Ausgangszustandes ($\underline{x}$) gegeben.
Die linearen Anteile von (13.3) sind aus der linearen Elastizitätstheorie bekannt (vgl. (13.2)); die Dehnungsanteile sind ε_{ij} für $i = j$, die doppelten Verzerrungsanteile ε_{ij} für $i \neq j$ sind die Gleitungen /39/.
Mit diesen grundlegenden Verzerrungsbeziehungen werden wir im folgenden näherungsweise den benachbarten Verformungszustand von Stabelementen beschreiben.
Zunächst erinnern wir jedoch an einige Grundlagen der Mechanik:
Für einen elastischen Körper unter statischer Belastung berechnet man die *Verzerrungsenergie* zu /80/:

$$U = \int_V \left\{\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\right\} dV \;. \tag{13.5}$$

σ_{ij} sind die Komponenten des Spannungstensors (i,j = 1,2,3) und V ist das Volumen des Körpers. U ist gleich der mechanischen Arbeit W_E, die durch die Belastung an den Verformungen des Körpers geleistet wird.
Den Spannungen sind über das Elastizitätsgesetz eindeutig die Dehnungen zugeordnet. Daraus folgt, daß die Verzerrungsenergie für elastische Körper allein in den Dehnungen darstellbar ist.
Die Dehnungen sind ihrerseits aus der Verschiebungsfunktion $\underline{w}$ abgeleitet (13.3). Wenn die Verschiebungsfunktion bis auf *Freiwerte* (Stützstellen) bekannt ist oder approximiert werden kann, dann kann auch die Verzerrungsenergie als Funktion dieser Freiwerte dargestellt werden.
Dieser Gedanke ist von zentraler Bedeutung, und wir erläutern ihn deshalb an einem Beispiel.

Beispiel 13.1:
Berechnung der Verzerrungsenergie für einen Stab mit einer Verschiebungsfunktion

$$w_1 = a\overline{x}^2 + b\overline{x} + c$$

$$(w_2 = w_3 = 0) \ .$$

Es handelt sich um einachsige Dehnungen. Für die lineare Dehnung nach (13.2) erhält man:

$$\varepsilon_{11} = 2a\overline{x} + b \ .$$

Für einen linear elastischen Werkstoff gilt:

$$\sigma_{11} = E\ \varepsilon_{11}$$

mit E als Elastizitätsmodul.
Damit erhält man nach (13.5):

$$U = \int_V \left\{ \int_0^{\varepsilon_{11}} E\ \varepsilon_{11}\ d\varepsilon_{11} \right\} dV \ .$$

Dies ergibt:

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{11}^2 \, dV .$$

Für einen Stab mit konstantem Querschnitt A und der Länge ℓ erhält man:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} (2a\bar{x} + b)^2 \, d\bar{x}$$

$$= (4a^2\ell^3/3 + 2ab\ell^2 + b^2\ell)EA/2 .$$

Damit ist U als Funktion der Freiwerte a, b und c gegeben. Diese Freiwerte sind Stützstellen der Verschiebungsfunktion (Bild 13.4).

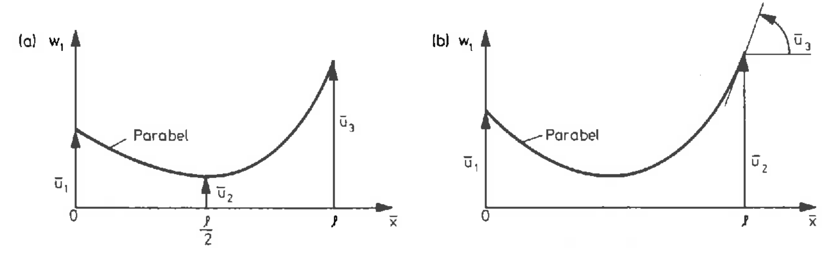


Bild 13.4 Verallgemeinerte Verschiebungen

Stützstellen einer Verschiebungsfunktion bezeichnet man üblicherweise als *verallgemeinerte Verschiebungen*. Es können irgendwelche Bestimmungsgrößen einer Verschiebungsfunktion sein, so z.B. auch Verdrehungen wie in Bild 13.4 (b) dargestellt. Die korrespondierenden Kräfte bezeichnet man als *verallgemeinerte Kräfte*.

Für den in Bild 13.4 gezeigten Fall könnten die Freiwerte a, b und c in $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ ausgedrückt werden, so ist z.B.

$$\bar{u}_1 \equiv w_1(0) = c .$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir einen wesentlichen Satz der Elastizitätstheorie formulieren /8/.

Satz 13.1 (*Erster Satz von Castigliano*): *Wenn die Verzerrungsenergie eines elastischen Körpers als Funktion verall-*

gemeinerter Verschiebungen $\bar{u}_i$ dargestellt werden kann, dann ist die erste partielle Ableitung der Verzerrungsenergie nach jeder verallgemeinerten Verschiebung gleich der korrespondierenden verallgemeinerten Kraft ($\bar{S}_i$):

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{u}_i} = \bar{S}_i \quad . \tag{13.6}$$

Der zweite Satz von Castigliano gilt nur für ein elastisches Stoffgesetz:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{S}_i} = \bar{u}_i \quad .$$

Wir werden im folgenden nur vom ersten Satz von Castigliano Gebrauch machen.
Damit sind alle Grundlagen bekannt, die für die folgenden Ableitungen benötigt werden.

13.3 Die geometrische Steifigkeitsmatrix des ebenen Fachwerkelementes

Wir betrachten ein ebenes Fachwerkelement (Bild 13.5) in seiner unverformten Ausgangslage und in einem verformten Nachbarzustand.

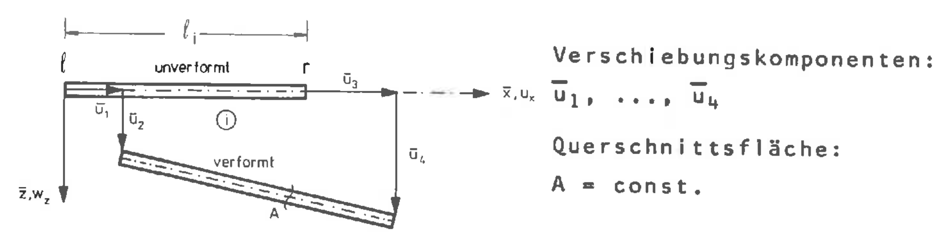


Bild 13.5 Fachwerkelement

Neben den üblichen Idealisierungen für ein Fachwerkelement gehen wir von folgenden *Annahmen* aus:

(1) Die Ableitung $u_{x,x}$ der Verschiebungsfunktion u_x nach $\bar{x}$

ist klein gegen 1, so daß gilt:

$$\left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)^2 \approx 0 , \tag{13.7}$$

(2) Die dritten und höheren Potenzen von $w_{z,x}$ sind vernachlässigbar klein,

(3) Die Druckbelastung eines Stabes liegt unterhalb der Eulerlast. Auf diese Annahme werden wir bei der Berechnung zurückkommen: *Sie ist immer nachzuprüfen.*

Mit diesen Annahmen ergibt sich aus (13.4):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{d\bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2 . \tag{13.8}$$

Die Dehnung ε_{xx} kann (Bild 13.5) durch die verallgemeinerten Verschiebungen $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_4$ dargestellt werden:

$$u_x = \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}_3 - \bar{u}_1}{\ell} \bar{x}$$

$$\text{und} \quad w_z = \bar{u}_2 + \frac{\bar{u}_4 - \bar{u}_2}{\ell} \bar{x} .$$

Damit ist

$$\frac{du_x}{d\bar{x}} = \frac{\bar{u}_3 - \bar{u}_1}{\ell}$$

$$\text{und} \quad \frac{dw_z}{d\bar{x}} = \frac{\bar{u}_4 - \bar{u}_2}{\ell} . \tag{13.9}$$

Für die Normalspannungen σ_{xx} gilt das Hooke'sche Gesetz:

$$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx} .$$

Man erhält für die Verzerrungsenergie:

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{xx}^2 \, dV .$$

Durch Einsetzen von (13.9) in (13.8) und unter Beachtung der zweiten Annahme ergibt sich:

$$U = \frac{EA}{2\ell}(\bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1\bar{u}_3 + \bar{u}_3^2) + \frac{EA}{2\ell^2}(\bar{u}_3 - \bar{u}_1)(\bar{u}_2^2 - 2\bar{u}_2\bar{u}_4 + \bar{u}_4^2) \ . \qquad (13.10)$$

Dies läßt sich weiter vereinfachen: Die Spannungen σ_{xx} sind konstant im Stabquerschnitt; für die Normalkraft F_1 ($F_1 > 0$: Zug) gilt deshalb unter Vernachlässigung des zweiten Terms von (13.8):

$$\frac{F_1}{A} \equiv \sigma_{xx} \simeq E\,\frac{\bar{u}_3 - \bar{u}_1}{\ell}$$

$$\text{oder} \qquad F_1 = \frac{EA}{\ell}(\bar{u}_3 - \bar{u}_1) \ . \qquad (13.11)$$

Durch Einsetzen in (13.10) erhält man damit die Verzerrungsenergie:

$$U = \frac{EA}{2\ell}(\bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1\bar{u}_3 + \bar{u}_3^2) + \frac{F_1}{2\ell}(\bar{u}_2^2 - 2\bar{u}_2\bar{u}_4 + \bar{u}_4^2) \ . \qquad (13.12)$$

Zur Berechnung einer Steifigkeitsrelation wenden wir den ersten Satz von Castigliano an und erhalten:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EA}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{lineare}} + \frac{F_1}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{geometrische}} \right\} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} \qquad (13.13)$$

Steifigkeitsmatrix (lokale Koordinaten)

Die Elementsteifigkeitsmatrix setzt sich aus zwei Einzelmatrizen zusammen; die erste ist unabhängig vom benachbarten Verformungszustand. In globalen Koordinaten ist es die *lineare Steifigkeitsmatrix*, die aus Kapitel 6 bekannt ist. Die zweite Matrix beschreibt durch die verformungsabhängige Normalkraft F_1 den benachbarten Verformungszustand, es ist die *geometrische Steifigkeitsmatrix*.

In globalen Koordinaten ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] + \frac{F_1}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ -cs & c^2 & cs & -c^2 \\ \hline -s^2 & cs & s^2 & -cs \\ cs & -c^2 & -cs & c^2 \end{array}\right] \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

lineare geometrische

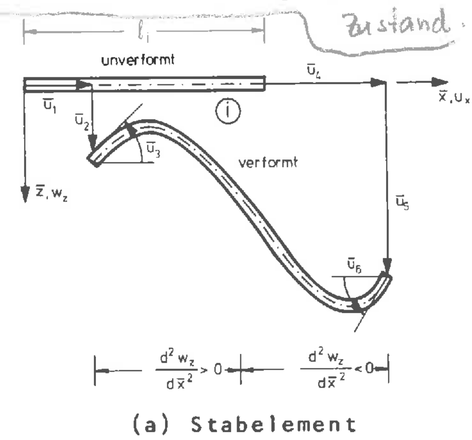
Steifigkeitsmatrix (globale Koordinaten) (13.14)

mit $c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$

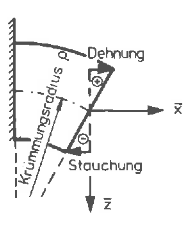
und $s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$.

13.4 Die geometrische Steifigkeitsmatrix des ebenen Stabelementes

Wir betrachten ein ebenes Stabelement (Bild 13.6) in seiner unverformten Ausgangslage und in einem verformten Nachbar- Zustand



(a) Stabelement



(b) Biegewirkung

Bild 13.6 Stabelement mit Biegeverformung

Neben den üblichen Idealisierungen für ein Stabelement gehen wir von folgenden Annahmen aus:

(1) Schubverformungen sind gegenüber Biegeverformungen vernachlässigbar klein,

(2) Im benachbarten Verformungszustand gilt für die Krümmung (Bild 13.6 (b)):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2} \qquad (13.15)$$

Dies folgt im wesentlichen aus der weiterhin gültigen Annahme (2) von Abschnitt 13.3 (ebenes Fachwerkelement).

(3) Die Ableitungen $u_{x,x}$ der Verschiebungsfunktion nach $\bar{x}$ sind klein gegen 1, so daß gilt:

$$\left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)^2 \approx 0 \; .$$

Mit diesen Annahmen ergibt sich für die Dehnung:

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{\frac{du_x}{d\bar{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2}_{\text{Dehnungsanteil}} \underbrace{- \bar{z}\left(\frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}\right)}_{\text{Biegeanteil}} \qquad (13.16)$$

Der Biegeanteil ist aus der elementaren Balkentheorie bekannt: Eine positive Krümmung (Bild 13.6 (b)) bewirkt eine Dehnung ($\varepsilon_{xx} > 0$) für $\bar{z} < 0$ und eine Stauchung ($\varepsilon_{xx} < 0$) für $\bar{z} > 0$. Die Dehnungen sind linear über den Querschnitt verteilt (Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, /39/) und man erhält den in (13.16) angegebenen Biegeanteil.

Als Näherungsansätze für den Verschiebungszustand wählen wir die Lösungen der linearen Theorie, wie man sie für ein unbelastetes Stabelement erhält:

$$u_x = a_0 + a_1\bar{x}$$

$$\text{und} \quad w_z = b_0 + b_1\bar{x} + b_2\bar{x}^2 + b_3\bar{x}^3 \qquad (13.17)$$

$$\text{mit} \quad a_i, b_i = \text{const.}$$

Mit diesen Ansätzen kann die Verformung eines unbelasteten Stabelementes mit *kleinen Verformungen* exakt bestimmt werden, d.h. in einem unbelasteten Stabelement im Gesamttragwerk sind die Verschiebungen in Richtung der Stabachse immer lineare und senkrecht zur Stabachse immer kubische Funktionen der Koordinate $\bar{x}$.

Mit den in Bild 13.6 (a) angegebenen Stützstellen als Randbedingungen erhält man die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten in (13.17):

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &\equiv u_x(0) = a_o ,\\
\bar{u}_4 &\equiv u_x(\ell) = a_o + a_1\ell ,\\
\bar{u}_2 &\equiv w_z(0) = b_o ,\\
\bar{u}_5 &\equiv w_z(\ell) = b_o + b_1\ell + b_2\ell^2 + b_3\ell^3 ,\\
\bar{u}_3 &\equiv - \frac{dw_z(0)}{d\bar{x}} = -b_1 ,\\
\bar{u}_6 &\equiv - \frac{dw_z(\ell)}{d\bar{x}} = -b_1 - 2b_2\ell - 3b_3\ell^2 .
\end{aligned} \tag{13.18}$$

Es sind dies sechs Gleichungen für sechs Unbekannte. Das zugrunde liegende Randwertproblem ist vollständig, und wir können nach den *verallgemeinerten Verschiebungen* (Stabendverformungen) auflösen:

$$\begin{aligned}
a_o &= \bar{u}_1 ,\\
a_1 &= \frac{\bar{u}_4 - \bar{u}_1}{\ell} ,\\
b_o &= \bar{u}_2 ,\\
b_1 &= -\bar{u}_3 ,\\
b_2 &= 3(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)/\ell^2 + (2\bar{u}_3 + \bar{u}_6)/\ell ,\\
b_3 &= 2(\bar{u}_2 - \bar{u}_5)/\ell^3 - (\bar{u}_3 + \bar{u}_6)/\ell^2 .
\end{aligned} \tag{13.19}$$

Die Ansätze (13.17) werden in Abhängigkeit von $\bar{u}_i$ angegeben; zugleich können auch die Dehnungen nach (13.16) von $\bar{u}_i$ abhängig dargestellt werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt ist die Verzerrungsenergie

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{xx}^2 \, dV$$

zu berechnen.

Mit $dV = dA \, d\bar{x}$ und $dA = d\bar{y} \, d\bar{z}$ erhält man:

$$U = \frac{E}{2} \int_{x=0}^{\ell} \int_A \Big[\left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}\right)^2 \bar{z}^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^4 - 2\left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)\left(\frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}\right)\bar{z}$$

$$- \left(\frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}\right)\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2 \bar{z} + \left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2 \Big] dA \, d\bar{x} \, . \qquad (13.20)$$

Wir haben vorausgesetzt, daß die $\bar{x}$-Achse im Schwerpunkt des Stabquerschnittes liegt. Daraus folgt:

$$\int_A \bar{z} \, dA = 0 \, . \qquad (13.21)$$

Es ist dies die Definitionsgleichung des Schwerpunktes der Fläche A. Damit und mit Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von $w_{z,x}$ erhält man:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)^2 d\bar{x} + \frac{EI_y}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 w_z}{d\bar{x}^2}\right)^2 d\bar{x} + \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{du_x}{d\bar{x}}\right)\left(\frac{dw_z}{d\bar{x}}\right)^2 d\bar{x} \, . \qquad (13.22)$$

Die Integrale können mit (13.17) und (13.19) in $\bar{u}_i$ dargestellt werden. Nach längerer Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{EA}{2\ell} \Big[(\bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_4^2) + \frac{2}{\ell}(\bar{u}_4 - \bar{u}_1)\Big(\frac{3}{5}\bar{u}_2^2 + \frac{\ell^2}{15}\bar{u}_3^2 + \frac{3}{5}\bar{u}_5^2$$

$$+ \frac{\ell^2}{15}\bar{u}_6^2 - \frac{\ell}{10}\bar{u}_2\bar{u}_3 - \frac{6}{5}\bar{u}_2\bar{u}_5 - \frac{\ell}{10}\bar{u}_2\bar{u}_6 + \frac{\ell}{10}\bar{u}_3\bar{u}_5 - \frac{\ell^2}{30}\bar{u}_3\bar{u}_6$$

$$+ \frac{\ell}{10}\bar{u}_5\bar{u}_6\Big)\Big] + \frac{2EI_y}{\ell^3}(3\bar{u}_2^2 + \ell^2\bar{u}_3^2 + 3\bar{u}_5^2 + \ell^2\bar{u}_6^2 - 3\ell\bar{u}_2\bar{u}_3$$

$$- 6\bar{u}_2\bar{u}_5 - 3\ell\bar{u}_2\bar{u}_6 + 3\ell\bar{u}_3\bar{u}_5 + \ell^2\bar{u}_3\bar{u}_6 + 3\ell\bar{u}_5\bar{u}_6) \, . \qquad (13.23)$$

Wie beim Fachwerkelement soll auch hier (13.11) gelten:

$$F_1 = \frac{EA}{\ell}(\bar{u}_4 - \bar{u}_1) \;.$$

Damit berechnet man die Steifigkeitsbeziehung nach dem ersten Satz von Castigliano (Satz 13.1) zu (*ebenes Stabelement*):

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{EI_y}{\ell^3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{A\ell^2}{I_y} & 0 & 0 & -\frac{A\ell^2}{I_y} & 0 & 0 \\ & 12 & -6\ell & 0 & -12 & -6\ell \\ & & 4\ell^2 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 \\ \hline & & & \frac{A\ell^2}{I_y} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & 12 & 6\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{array}\right]}_{\text{lineare}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} + F_1 \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5\ell} & \frac{-1}{10} & 0 & \frac{-6}{5\ell} & \frac{-1}{10} \\ & & \frac{2\ell}{15} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-\ell}{30} \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2\ell}{15} \end{array}\right]}_{\text{geometrische}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix (13.24)

Die geometrische Steifigkeitsmatrix des *ebenen Stabelementes* in globalen Koordinaten ergibt sich zu:

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1}{30\ell}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 36s^2 & -36cs & 3s\ell & -36s^2 & 36cs & 3s\ell \\ & 36c^2 & -3c\ell & 36cs & -36c^2 & -3c\ell \\ & & 4\ell^2 & -3s\ell & 3c\ell & -\ell^2 \\ \hline & & & 36s^2 & -36cs & -3s\ell \\ & \text{symmetrisch} & & & 36c^2 & 3c\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{array}\right]$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$$

$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i \;.$$

In Abschnitt 6.2 wurde die zugehörige lineare Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_e^i \equiv \underline{k}^i$ bestimmt.
Für den benachbarten Verformungszustand sind damit die Steifigkeitsmatrizen bekannt.

An dieser Stelle ist ein Vergleich mit Gleichung (12.36) interessant: In Abschnitt 12.4 haben wir dieselbe geometrische Steifigkeitsmatrix durch eine Linearisierung der nichtlinearen Verformungsbeziehungen des Stabelementes abgeleitet. Bei der Ableitung wurde dort von den Gleichgewichtsbedingungen im Nachbarzustand ausgegangen, und die Gültigkeit der *Differentialgleichung des Balkens*

$$d^2 w_z / d\bar{x}^2 = -M_y / EI_y$$

wurde vorausgesetzt.

In diesem Abschnitt wurde hingegen von großen Dehnungen und Verformungen ausgegangen. Die Dehnungen wurden hier aus dem *Lagrange'schen Verzerrungstensor* abgeleitet, die Verformungen wurden in Übereinstimmung mit der Differentialgleichung des Balkens gewählt.

Die geometrische Steifigkeitsmatrix wurde im ersten Fall durch einen Grenzübergang erhalten, in der vorliegenden Ableitung haben wir den ersten Satz von Castigliano verwendet.

Die Ergebnisse beider Ableitungen sind identisch; es zeigt sich also, daß die Annahmen und Vernachlässigungen in beiden Fällen die gleichen sind. Die Ableitung der geometrischen Steifigkeitsmatrizen aus der Verzerrungsenergie mit Hilfe des Satzes von Castigliano ist zweifelsohne der einfachere Weg, dem heute allgemein der Vorzug gegeben wird. Wir haben jedoch hier den ersten Weg vollständig dargestellt, um die Identität beider Methoden zu verdeutlichen, hauptsächlich aber auch, um die Stabilitätsberechnung in linearisierter Form darstellen zu können.

13.5 Das Newton'sche Verfahren als Grundlage der iterativen Lösung

Bei der Lösung von Stabilitätsproblemen sind wir davon ausgegangen, daß die Knotenlasten lineare Funktionen des Pro-

portionalitätsfaktor λ sind (Abschnitt 12.1); mit der zusätzlichen Annahme, daß die Schnittgrößen bis zum Erreichen der kritischen Belastung linear von den Verformungen abhängen (kleine Verformungen), ergab sich die Stabilitätsgleichung (12.3):

$$\underline{K}(\lambda\underline{F})\ \underline{r} = \lambda\underline{R}\ .$$

Bei nichtlinearen Verformungen müssen wir diese Annahmen verlassen. Zur prinzipiellen Darstellung des Lösungsweges nehmen wir an, die "Gleichgewichtsbedingungen" seien als ein System n nichtlinearer Gleichungen in $\underline{\tilde{r}}^T = [\ \underline{r} \mid \underline{S}\ ]$ gegeben.

$$\underline{g}(\underline{\tilde{r}}) = \underline{R} \quad \text{mit} \quad \underline{g}_{n\times 1} \tag{13.25}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $\underline{\tilde{r}}$ kann im allgemeinen nicht gezeigt werden; mit intuitiven, ingenieurmäßig begründeten Annahmen gelingt es jedoch, konvergente Iterationsverfahren abzuleiten, die das mechanische Problem genügend genau erfassen.

Diese Iterationsverfahren werden aus dem Newton'schen Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme abgeleitet. Wir betrachten die i-te Gleichung von (13.25):

$$g_i(\underline{\tilde{r}}) = R_i\ , \quad i = 1, \ldots, n\ . \tag{13.26}$$

Für das Newton'sche Iterationsverfahren muß die Jakobi-Matrix /14/ in einem Ausgangszustand $\underline{\tilde{r}}^\nu$ berechnet werden. Die Jakobi-Matrix ist der Gradient von $\underline{g}$:

$$\underline{J}^\nu \equiv \underline{J}(\underline{\tilde{r}}^\nu) = \frac{\partial \underline{g}(\underline{\tilde{r}}^\nu)}{\partial \underline{\tilde{r}}}$$

$$\text{mit} \quad J_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial \tilde{r}_j}\ , \quad i,j = 1,2,\ldots,n\ . \tag{13.27}$$

In einer Umgebung von $\underline{\tilde{r}}^\nu$ gilt (Taylorreihe):

$$\underline{g}(\underline{\tilde{r}}^\nu + \partial\underline{\tilde{r}}) \approx \underline{g}(\underline{\tilde{r}}^\nu) + \underline{J}^\nu\ \partial\underline{\tilde{r}} = \underline{R}\ . \tag{13.28}$$

Ersetzt man $\partial \underline{\tilde{r}}$ durch Differenzen

$$\partial \underline{\tilde{r}} \equiv \Delta \underline{\tilde{r}} = \underline{\tilde{r}}^{\nu+1} - \underline{\tilde{r}}^{\nu}$$

dann ergibt sich die *Iterationsgleichung nach Newton-Raphson:*

$$\underline{J}^{\nu}\, \underline{\tilde{r}}^{\nu+1} = \underline{R} - \underline{g}(\underline{\tilde{r}}^{\nu}) + \underline{J}^{\nu}\, \underline{\tilde{r}}^{\nu} \tag{13.29}$$

oder $$\underline{R} = \underline{g}(\underline{\tilde{r}}^{\nu}) - \underline{J}^{\nu}\, \underline{\tilde{r}}^{\nu} + \underline{J}^{\nu}\, \underline{\tilde{r}}^{\nu+1}\ . \tag{13.30}$$

Bei der iterativen Berechnung von Tragwerken ist vorausgesetzt, daß der Ausgangszustand $\underline{\tilde{r}}^{\nu}$ die Gleichgewichtsbedingung (13.25) für eine gegebene Belastung $\underline{R}^{k}$ erfüllt und eindeutig ist.

Die Iteration nach (13.30) ist aufwendig: In jedem Schritt muß die Matrix $\underline{J}$ neu berechnet und ein lineares Gleichungssystem (13.30) gelöst werden. Eine idealisierte qualitative Darstellung des Iterationsverlaufes ist für ein System mit nur einem Freiheitsgrad in Bild 13.7 (a) gegeben.

Im ersten Fall (Bild 13.7 (a)) wird bei jeder Iteration eine neue Tangentialapproximation $\underline{J}$ berechnet. Im zweiten Fall hingegen wird die Tangentialapproximation von $\underline{J}$ solange beibehalten, bis der Zuwachs von $\underline{\tilde{r}}$ kleiner als eine vorgegebene Schranke ε_r wird.

Im mehrdimensionalen Fall wird ε_r mit der Norm von $\underline{\tilde{r}}$ verglichen:

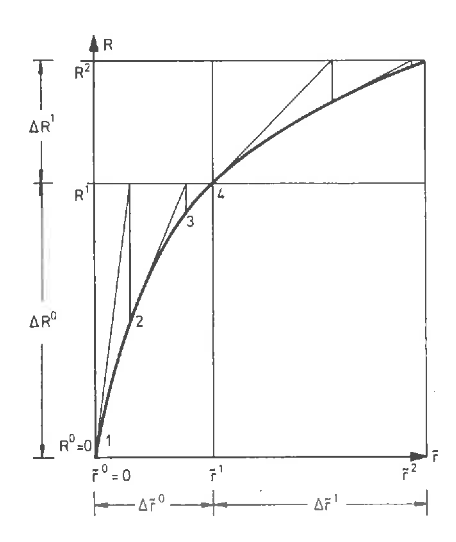
$$\| \underline{\tilde{r}}^{\nu+1} - \underline{\tilde{r}}^{\nu} \| < \varepsilon_r\ . \tag{13.31}$$

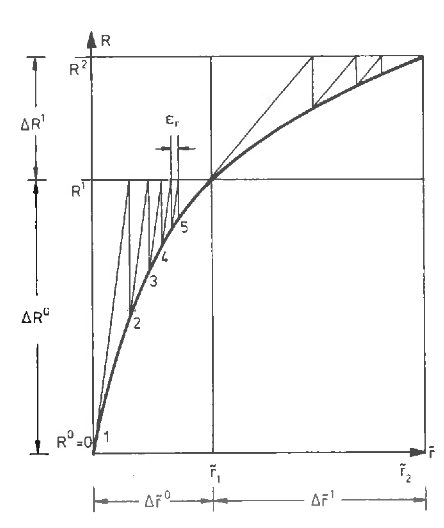
Erst wenn diese Schranke erreicht ist, wird eine neue Tangentialmatrix (Jakobi-Matrix) berechnet.

Dieses Verfahren wird oft als modifiziertes Newton-Raphson Verfahren bezeichnet.

Im Fall (a) ist $\underline{J}$ in jedem Punkt (1-2-3- ...) zu berechnen, das Gleichungssystem (13.30) ist in jedem Punkt zu lösen.

Im Fall (b) muß in jedem Punkt (1-2-3- ...) nur das Gleichungssystem (13.30) gelöst werden, und es ergeben sich wesentlich mehr Punkte.





(a) Newton-Raphson Verfahren (b) modifiziertes Newton-Raphson Verfahren

Bild 13.7 Qualitative Darstellung des Newton-Raphson Verfahrens für proportionale Belastung

Dafür ist jedoch $\underline{J}^{-1}$ nur dann zu berechnen, wenn sich

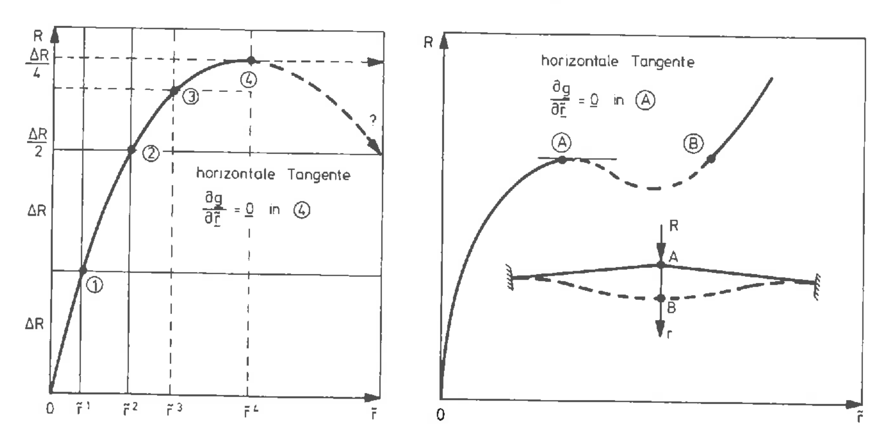
$$\| \underline{\tilde{r}}^{\nu+1} - \underline{\tilde{r}}^{\nu} \| < \varepsilon_r$$

ergibt. In der Anwendung auf Tragwerke wird man immer den zweiten Fall wählen, da die Berechnung von $\underline{J}^{-1}$ sehr aufwendig ist. Für große Werte von ε_r gehen außerdem beide Fälle ineinander über.

Numerische Schwierigkeiten treten dann auf, wenn det($\underline{J}$) sehr klein wird. Dies entspricht im eindimensionalen Fall einer horizontalen Tangente (Bild 13.8 (a)). Das Gleichungssystem (13.30) besitzt hierfür keine eindeutige Lösung; die Verformungen $\underline{\tilde{r}}$ nehmen bei konstanter Belastung zu. Solche Fälle werden im allgemeinen schon durch die Forderung ausgeschlossen, daß der Werkstoff im linear-elastischen Bereich bleiben muß (Bild 13.1 (b)).

Einen Sonderfall stellen die *Durchschlagprobleme* (Bild 13.8

(b)) dar. Bei diesen Problemen wird eine horizontale Tangente (Punkt Ⓐ) erreicht, das Tragwerk ändert seine Geometrie und erreicht wieder eine stabile Nachbarlage. Für die Berechnung dieser Probleme sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, auf die wir hier nicht eingehen können.



(a) unbestimmte Verformungen (b) Durchschlagproblem

Bild 13.8 Sonderfälle der iterativen Berechnung

Wir beschränken uns deshalb auf die Verformungsbereiche, für die eine eineindeutige Zuordnung von Last und Verformung existiert (Bild 13.8 (a): 0 bis ④ und (b): 0 bis Ⓐ).

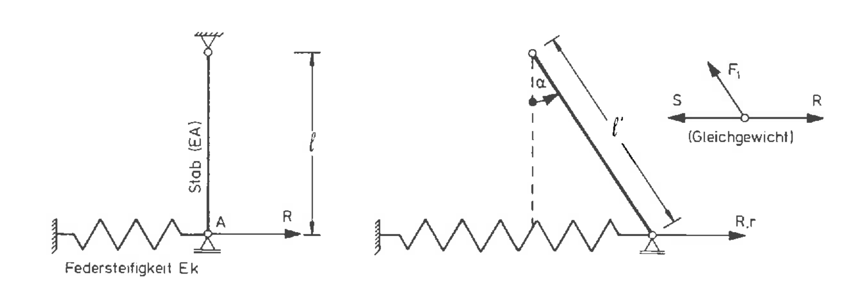
Die Anwendung der vollständigen Iteration nach (13.30) zeigen wir mit einem einfachen Beispiel (Bild 13.9, siehe auch /45/, Seite 158).

Beispiel 13.2:

An einem Stab-Federsystem wird das Newton Verfahren mit einer genauen Lösung verglichen (Bild 13.9).

Das Gleichgewicht in Knoten A erhält man zu:

$$-S - F_1 \sin \alpha + \lambda R = 0 \; . \qquad (i)$$



(a) unverformtes System (b) verformtes System

Bild 13.9 Stab-Federsystem

Die Feder besitzt die Federsteifigkeit Ek, es ist:

$$S = (Ek)\ r\ .$$

Für die Stabkraft gilt (vgl. (13.1)):

$$F_1 = EA(\ell'/\ell - 1)\ .$$

Mit $\ell/\ell' = \cos\alpha\ ,$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}\ , \quad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}$$

$$\tan\alpha = r/\ell$$

erhält man aus (i):

$$-Ek\ r - EA\left(\sqrt{(r/\ell)^2 + 1} - 1\right)\frac{r/\ell}{\sqrt{(r/\ell)^2 + 1}} + R = 0$$

oder:

$$R = Ek\ \ell\ \rho + \frac{EA(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1)}{\sqrt{\rho^2 + 1}}\ \rho \quad \text{mit } \rho = r/\ell\ . \qquad \text{(ii)}$$

Damit ist die genaue Lösung $R(\rho)$ bekannt; sie ist in Bild 13.10 dargestellt.

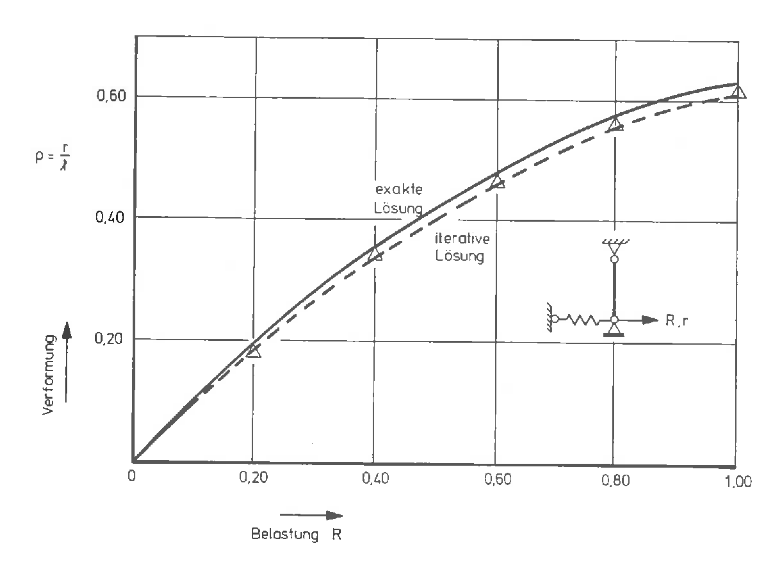


Bild 13.10 Lastverformungsdiagramm

Zum Vergleich zeigen wir eine iterative Lösung nach (13.30). Hierzu gehen wir von den folgenden Gleichungen aus:

$$g_1: \quad Ek\,\ell\,\rho + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} F_1 = R \,,$$

$$g_2: \quad EA(\sqrt{\rho^2+1} - 1) - F_1 = 0 \,. \qquad \text{(iii)}$$

Es wird die Jakobi-Matrix berechnet:

$$J_{11} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial \rho} = Ek\,\ell + (\rho^2+1)^{-3/2} \,,$$

$$J_{12} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial F_1} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} \,,$$

$$J_{21} \equiv \frac{\partial g_2}{\partial \rho} = \frac{EA}{\sqrt{\rho^2+1}} \,,$$

$$J_{22} \equiv \frac{\partial g_2}{\partial F_1} = -1 \,.$$

Ausgehend von $\rho = 0$ und $\Delta R = 0{,}2$ kann man damit die Lösung auf iterativem Wege nach (13.30) berechnen.
Die Ergebnisse der exakten und iterativen Lösung sind in Bild 13.10 gegenübergestellt.
In der Anwendung auf statisch unbestimmte Stabwerke sind die Gleichungen g_i üblicherweise komplizierter als im vorliegenden Fall. Die Schnittgrößen (Stabendkräfte) sind üblicherweise implizite Funktionen der Verformungen.

13.6 Schnittgrößen- und Verformungsiteration

Im folgenden wird die Anwendung des Newton-Raphson Verfahrens bei der Berechnung von Stabwerken gezeigt.
Wir betrachten ein Stabwerk mit vorgegebener Belastung $\underline{R}^m$. Gesucht sind die $\underline{R}^m$ zugeordneten Knotenverformungen $\underline{r}^m$ und die Stabendkräfte $\bar{\underline{S}}^m$. Wenn diese Vektoren bekannt sind, können die Zustandslinien (siehe Abschnitt 4.8) und die Verformungen (siehe Abschnitt 5.4) mit den bekannten Verfahren berechnet werden. Auf die diesbezüglichen Berechnungen werden wir hier, um Wiederholungen zu vermeiden, nicht eingehen; wir beschränken uns auf die Berechnung von $\underline{r}^m$ und $\underline{S}^m$. Das Superpositionsprinzip (Satz 6.1) verliert seine Gültigkeit im nichtlinearen Bereich:
Die Belastung muß ausgehend von einem unbelasteten Zustand eindeutig in Parameterform gegeben sein, so z.B. mit λ als Lastparameter der i-ten Lastkomponente als:

$$R_i = R_i(\lambda) \ .$$

Ein Sonderfall einer solchen Parameterbelastung ist die proportionale Belastung, wie wir sie bei der Behandlung von Stabilitätsproblemen vorausgesetzt haben. Wir bezeichnen $\underline{R}(\lambda)$ als *"Belastungsgeschichte"* und identifizieren damit λ als Zeitfaktor einer quasi-statischen Belastung (Bild 13.11).
Üblicherweise ist die Belastungsgeschichte durch Lastinkre-

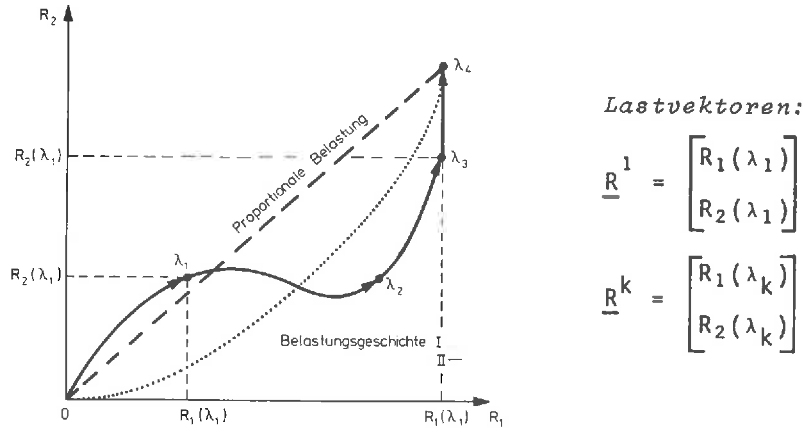


Bild 13.11 Belastungsgeschichte eines Tragwerkes mit zwei Lastkomponenten

mente gegeben:

$$
\begin{aligned}
\underline{R}^0 &= \underline{0} \quad \text{(unbelasteter Zustand)}\,, \\
\underline{R}^1 &= \underline{R}^0 + \Delta\underline{R}^1 \\
&\vdots \\
\underline{R}^k &= \underline{R}^{k-1} + \Delta\underline{R}^k \\
&\vdots \\
\underline{R}^m &= \underline{R}^{m-1} + \Delta\underline{R}^m\,.
\end{aligned}
\tag{13.32}
$$

Für die folgende Berechnung nehmen wir an, daß die Belastungsgeschichte durch Lastinkremente gegeben ist. Die Größe eines Lastinkrementes ist gegeben durch die Norm:

$$\|\Delta\underline{R}\| = \sqrt{\Delta\underline{R}^T\,\Delta\underline{R}}\,. \tag{13.33}$$

Wir setzen voraus, daß die Lastinkremente so klein gewählt werden, daß zwischen den einzelnen Lastschritten $\underline{R}^k$ und $\underline{R}^{k+1}$ eine eindeutige Zuordnung der Last $\underline{R}$ und der Verformung $\underline{r}$ existiert. Diese Voraussetzung kann nur durch Vergleichsberechnungen mit kleineren Schrittweiten und durch die ingenieurmäßige Beurteilung einer Konstruktion überprüft werden.

Mit diesen grundlegenden Festlegungen bezüglich der Belastung, betrachten wir nun das Problem der iterativen Berechnung.

Mit $S_4 \equiv F_1$ ergibt ein Vergleich von (13.24)

$$\underline{\bar{S}} = \underline{k}_e \, \underline{\bar{u}} + \underline{\bar{k}}_g(\underline{S}^0) \, \underline{\bar{u}}$$

mit (13.30)

$$\underline{R} = \underline{g}(\underline{\tilde{r}}^\nu) + \underline{J}^\nu(\underline{\tilde{r}}^{\nu+1} - \underline{\tilde{r}}^\nu) \; , \quad \underline{\tilde{r}}^T = [\underline{S} \; \underline{r}]$$

die Iterationsvorschrift für die Berechnung der Stabendkräfte. Es ist:



$$\underline{\bar{S}}^{\nu+1} = \underline{\bar{k}}_e \, \underline{\bar{u}}^{\nu+1} + \underline{\bar{k}}_g(\underline{\bar{S}}^\nu) \, \underline{\bar{u}}^{\nu+1} \quad (13.34)$$

(*Schnittgrößeniteration*)

Die Iteration für die Knotenverformungen ergibt sich aus den Ableitungen der geometrischen Steifigkeitsmatrix. Gleichung (13.24) gilt für den unverformten Ausgangszustand. Für jeden Ausgangszustand mit den Verformungen $\underline{r}^\nu$ ist auch die elastische Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_e$ abhängig von den Knotenverformungen.

Für ein Fachwerkelement mit Verformungen $\underline{r}$ berechnet man z.B. die Länge ℓ' im verformten Ausgangszustand zu (vgl. Bild 13.12):

$$\ell' = \sqrt{[(x_j+r_3) - (x_k+r_1)]^2 + [(z_j+r_4) - (z_k+r_2)]^2} \; .$$

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_e(\underline{r})$ des verformten Ausgangszustandes ist mit ℓ' anstelle von ℓ (im unverformten Ausgangszustand) zu berechnen.

Da sich die Geometrie des Tragwerkes mit jeder Änderung von $\underline{\bar{S}}$ ändert, muß eine Iteration über $\underline{r}$ durchgeführt werden. Wir kennzeichnen diese Iteration durch denselben Zeiger ν:

$$\underline{S}^{\nu+1} = \underline{k}_e(\underline{r}^\nu) \, \underline{u}^{\nu+1} + \underline{k}_g(\underline{S}^\nu) \, \underline{u}^{\nu+1} \; . \quad (13.35)$$

Die Stabendverformungen sind durch die Verträglichkeitsbedingung von dem benachbarten Verformungszustand $\underline{r}^{\nu+1}$ ab-

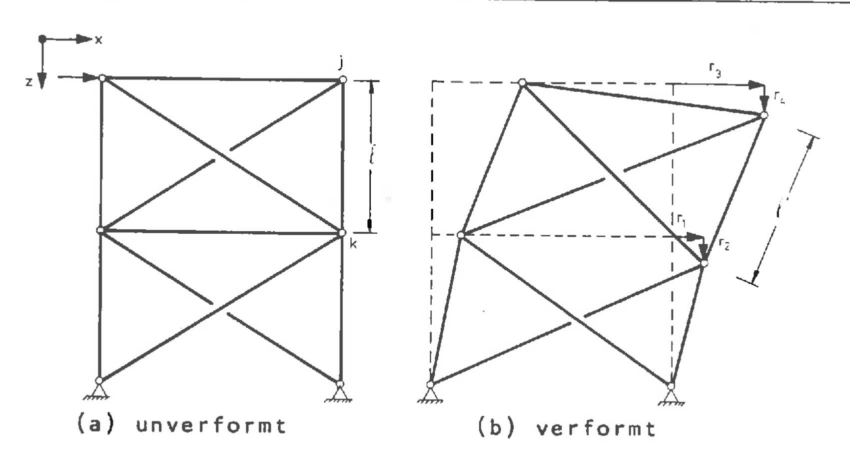


Bild 13.12 Geometrie eines verformten Ausgangszustandes

hängig; wir setzen deshalb:

$$\underline{u}^{\nu+1} = \underline{C}^T \; \underline{r}^{\nu+1} \; . \qquad (13.36)$$

Für die Gleichgewichtsbedingungen gilt (vgl. (5.15)):

$$\underline{C} \; \underline{S}^{\nu+1} = \underline{R}^k \; . \qquad (13.37)$$

Hierbei ist $\underline{R}^k$ die vorgegebene Laststufe, für welche die Iteration über ν durchgeführt werden muß (k kennzeichnet also keine Iteration).

Durch Umformung der Gleichungen (13.35) bis (13.37) erhält man (vgl. Weggrößenverfahren, Kapitel 6):

$$[\, \underline{K}^e(\underline{r}^\nu) + \underline{K}^g(\underline{\bar{S}}^\nu) \,] \; \underline{r}^{\nu+1} = \underline{R}^k \qquad (13.38)$$

mit $\quad \underline{K}^e(\underline{r}^\nu) = \underline{C} \; \underline{k}_e(\underline{r}^\nu) \; \underline{C}^T$

und $\quad \underline{K}^g(\underline{\bar{S}}^\nu) = \underline{C} \; \underline{k}_g(\underline{\bar{S}}^\nu) \; \underline{C}^T \; . \qquad (13.39)$

Die Iteration über $\underline{r}^\nu$ bezeichnen wir als Verformungsiteration.

Die Stabendkräfte ergeben sich mit (13.36) und (13.35) zu:

$$\underline{S}^{\nu+1} = [\, \underline{k}_e(\underline{r}^\nu) + \underline{k}_g(\underline{\bar{S}}^\nu) \,] \; \underline{C}^T \; \underline{r}^{\nu+1} \; . \qquad (13.40)$$

Analog zu (13.31) betrachten wir eine Iteration in einer Laststufe als konvergent, wenn die Fehlerschranke ε erreicht ist:

$$\frac{\|\underline{r}^{\nu+1} - \underline{r}^{\nu}\|}{\|\underline{r}^{\nu}\|} + \frac{\|\bar{\underline{S}}^{\nu+1} - \bar{\underline{S}}^{\nu}\|}{\|\bar{\underline{S}}^{\nu}\|} < \varepsilon \ . \qquad (13.41)$$

Mit der zuletzt erreichten Verformung ist eine Näherung für die *Knotenverformung* der Laststufe $\underline{R}^k$ bekannt:

$$\underline{r}^k = \underline{r}^{\nu+1} \ . \qquad (13.42)$$

Mit den zuletzt erreichten Stabendkräften ist eine Näherung für die *Stabendkräfte* der Laststufe $\underline{R}^k$ bekannt:

$$\bar{\underline{S}}^k = \bar{\underline{S}}^{\nu+1} \ . \qquad (13.43)$$

Die Matrix des Gleichungssystemes (13.38) ist für eindeutige Gleichgewichtslagen positiv definit:

$$\det\,(\underline{K}^e(\underline{r}^{\nu}) + \underline{K}^g(\bar{\underline{S}}^{\nu})) > 0 \ .$$

Ergibt sich deshalb im Laufe der Iteration

$$\det\,(\underline{K}^e + \underline{K}^g) \leq 0 \ , \qquad (13.44)$$

dann gibt es für die Laststufe $\underline{R}^k$ keine eindeutige Gleichgewichtslage: Die Berechnung muß in diesem Fall ausgehend vom letzten Lastschritt ($\underline{R}^{k-1}$, $\underline{r}^{k-1}$, $\bar{\underline{S}}^{k-1}$) mit einem kleineren Lastinkrement (üblicherweise 1/2 ΔR^k) wiederholt werden. Es ist also durchaus möglich, daß die Endbelastung $\underline{R}^m$ der vorgegebenen Belastungsgeschichte nicht erreicht werden kann. Die letzte abgeschlossene Iteration ergibt in diesem Fall die (im Rahmen der getroffenen Annahmen) *zulässige Belastung. Damit ist die iterative Berechnung eines nichtlinearen Stabwerkes vollständig beschrieben.* In Bild 13.13 ist ein Ablaufdiagramm der Berechnung dargestellt.
Der numerische Aufwand für einen jeden Lastschritt ist im Vergleich zur linearen Berechnung sehr groß; üblicherweise werden für brauchbare Näherungen mindestens 10 - 20 Itera-

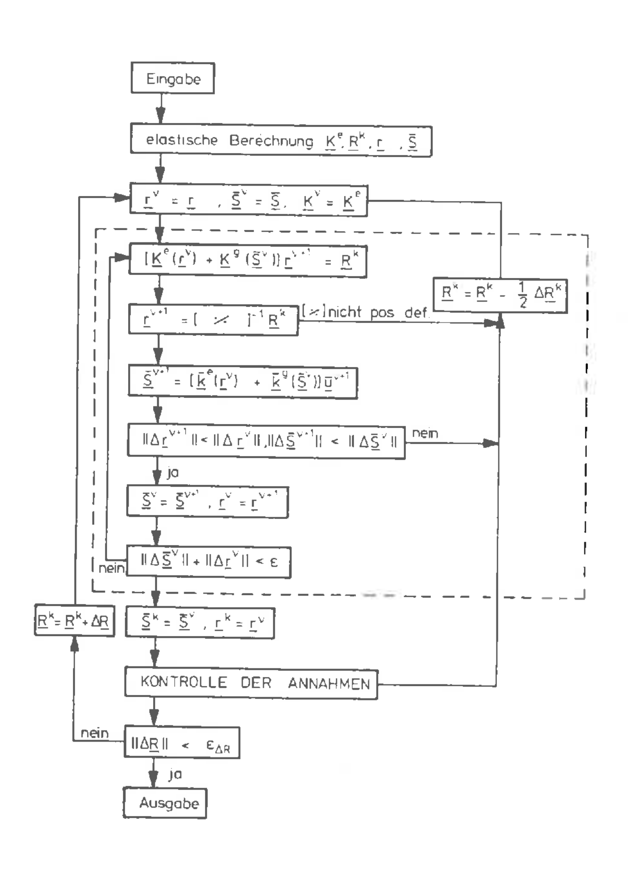


Bild 13.13 Ablaufdiagramm der nichtlinearen Berechnung

tionen benötigt. Es erscheint deshalb besonders wichtig, nochmals an die Voraussetzungen und Annahmen der Berechnung zu erinnern. Eine qualitative Beurteilung anhand der Ergebnisse ist zwar sinnvoll, aber äußerst unzuverlässig: Auch bei groben Fehlern ergibt sich meist eine "glatte" Kurve als Lastverformungsdiagramm.
Es ist deswegen notwendig, in jedem Rechenprogramm Kontrollberechnungen durchzuführen. Mit Bezug zum Ablaufdiagramm (Bild 13.13) sind die wichtigsten *Kontrollen* im folgenden zusammengestellt.

Zu Beginn der Berechnung wird geprüft, ob die erste Gesamtsteifigkeitsmatrix positiv definit ist.

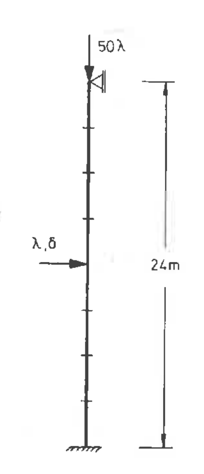
Zwischen den einzelnen Lastschritten wird geprüft, ob die Annahmen und Voraussetzungen der Berechnung noch erfüllt sind. Als Beispiel erinnern wir an die Annahme, daß Fachwerkstäbe nicht vor Erreichen der Endlast wie Eulerstäbe ausknicken oder unzulässige Verformungen auftreten. Es ist außerdem sinnvoll, in jedem Belastungsschritt die auftretenden Spannungen zu überprüfen.

Für zwei Beispiele werden im folgenden die Ergebnisse mit der vollständigen Iteration dargestellt.

Beispiel 13.3:
Ein einseitig eingespannter Stab (Bild 13.14) mit Normal- und Querbelastung wird mit einer Unterteilung in 2, 4 und 8 Elemente berechnet.

In den Last-Verformungskurven sind die Ergebnisse aus Berechnungen mit linearen Elementen (nur Verformungsiteration) und mit nichtlinearen Elementen (Verformungs- und Schnittgrößeniteration) gegenübergestellt.

Bei einer Verwendung der linearen Steifigkeitsmatrix wird die Steifigkeit des Systems überschätzt und somit die Last-Verformungskurve "von oben" angenähert. Durch die Gleichsetzung von Stabsehne ℓ und Bogenlänge s wird bei Verwendung des nichtlinearen Elementes die Steifigkeit unterschätzt, die Normalkraft als zu groß angenommen und somit die Last-Verformungskurve "von unten" angenähert. Der Einfluß ist allerdings so gering, daß er in der Zeichnung nicht mehr darstellbar ist.
Beide Einflüsse verschwinden, wenn die Elementeinteilung genügend klein gewählt wird.



Stab: IPE 200 , St 37

$I_y = 1{,}94 \cdot 10^{-5}\ m^4$

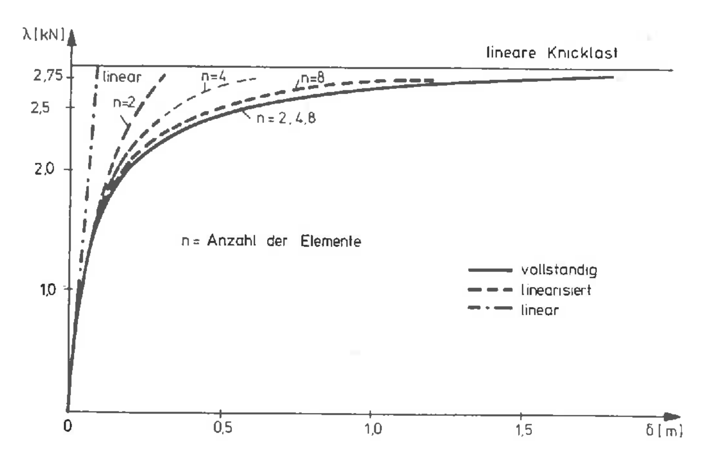
$A = 2{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$E = 2{,}10 \cdot 10^{8}\ kN/m^2$

Spannung für $\lambda = 2{,}75$:

$\max \sigma = 112034\ kN/m^2$

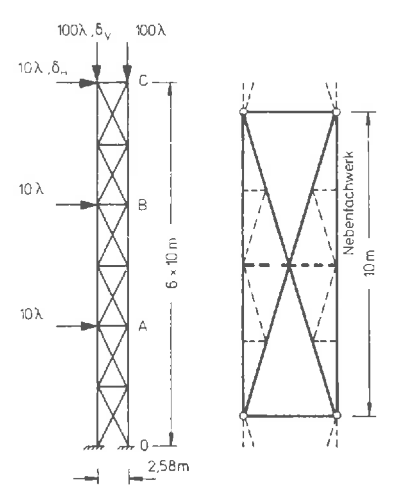
(a) System und Belastung



(b) Last-Verformungskurven berechnet mit MESY /25/

Bild 13.14 Vergleichsberechnung eines Stabes mit Normal- und Querbelastung

Beispiel 13.4:
Ein Fachwerk (Bild 13.15) wird für proportionale Belastung im geometrisch nichtlinearen Bereich berechnet.



Profile nach Profiltafeln:
(MSH: Mannesmann-Hohlprofile)

0 - A: MSH 200 × 200 × 6,3

A - B: 140 × 140 × 5,6

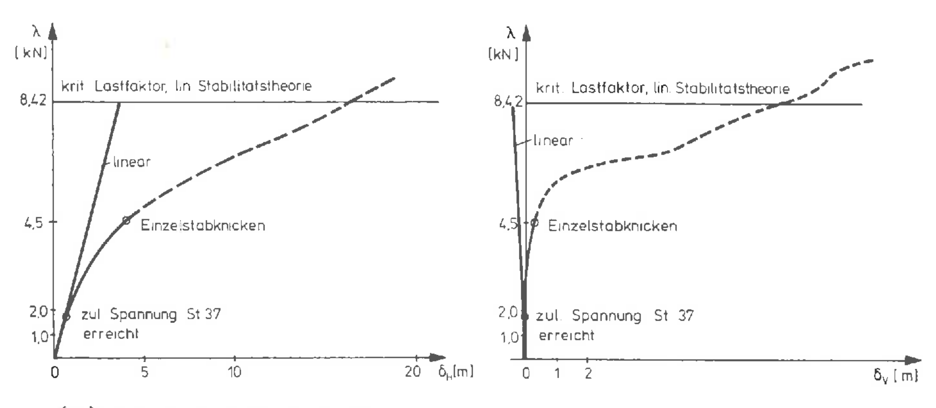
B - C: 110 × 110 × 4,0

Knicklängen:

für alle Stäbe 2,85 m

2,58 m

(a) Belastung und System



(b) Last-Verformungskurven

Bild 13.15 Nichtlineare Berechnung eines Fachwerkes

13.7 Iterative Lösung mit Ersatzknotenlasten

Die Iteration mit Ersatzknotenlasten ist im wesentlichen mit dem modifizierten Newton-Raphson Verfahren (Bild 13.7 (b)) identisch:

Die Verformungsberechnung (vgl. Ablaufdiagramm, Bild 13.13)

wird mit der elastischen Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^e(\underline{r}^\rho = \underline{r}^k)$ solange fortgeführt, bis eine Fehlerschranke ε_S der Stabendkräfte erreicht ist. Zusätzlich wird von der Annahme kleiner Änderungen der geometrischen Steifigkeit ausgegangen; es wird angenommen, daß gilt:

$$\underline{K}^g(\underline{\bar{S}}^{\nu+1})\ \underline{r}^\nu \approx \underline{K}^g(\underline{\bar{S}}^\nu)\ \underline{r}^\nu\ . \tag{13.45}$$

Damit folgt für die Verformungsberechnung mit Ersatzknotenlasten $(-\underline{K}^g\ \underline{r}^\nu)$:

$$\underline{K}^e\ \underline{r}^{\nu+1} = \underline{R}^k - \underline{K}^g(\underline{\bar{S}}^\nu)\ \underline{r}^\nu\ . \tag{13.46}$$

Die Stabendkräfte berechnet man wie im vorhergehenden Abschnitt aus:

$$\underline{\bar{S}}^{\nu+1} = [\ \underline{\bar{k}}_e + \underline{\bar{k}}_g(\underline{\bar{S}}^\nu)\ ]\ \underline{C}^T\ \underline{r}^{\nu+1}\ . \tag{13.47}$$

Nach Erreichen der Fehlerschranke

$$\varepsilon_S > \| \Delta \underline{\bar{S}} \|$$

muß die Iteration mit der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}^e(\underline{r}^{\rho+1}=\underline{r}^{\nu+1})$ wiederholt werden bis auch die Fehlerschranke der Verformungen

$$\varepsilon_r > \| \underline{r}^{\rho+1} - \underline{r}^\rho \| \tag{13.48}$$

erreicht ist. Die Iteration über ρ erfolgt für dieselbe Laststufe. Die Belastung wird erst dann erhöht, wenn die Fehlerschranken erreicht sind.

In Bild 13.16 ist ein Ablaufdiagramm der modifizierten Newton-Raphson Iteration dargestellt. Es ersetzt die Newton-Raphson Iteration, wie sie in Bild 13.13 angegeben ist. Die übrigen Rechenschritte des Ablaufdiagrammes nach Bild 13.13 bleiben erhalten.

Die Iteration mit Ersatzknotenlasten kann zu erheblichen Einsparungen an Rechenzeit führen, insbesondere wenn die Verformungsänderungen in einem Lastschritt relativ klein sind.

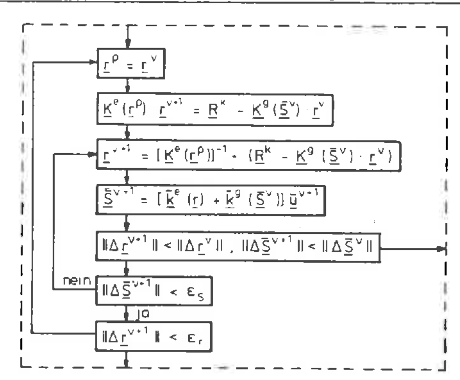


Bild 13.16 (vgl. Bild 13.13) Iteration für das modifizierte Newton-Raphson Verfahren

Die Ersparnis an Rechenzeit resultiert aus der vereinfachten Verformungsiteration. In jedem Iterationsschritt ν ist ein Gleichungssystem mit unveränderter Matrix $\underline{K}^{e}(\underline{r}^{\rho})$ zu lösen. Die Matrix $\underline{K}^{e}(\underline{r}^{\rho})$ ist positiv definit und die Lösung erfolgt mit dem Cholesky-Verfahren. Hierbei ist eine Dreieckszerlegung durchzuführen mit einem Rechenaufwand von der Größenordnung n^{3} für $\underline{K}^{e}_{n \times n}$. Mit dieser Dreieckszerlegung wird die Lösung des Gleichungssystemes durch Vorwärts-Rückwärtseinsetzen (Rechenaufwand von der Ordnung n^{2}) berechnet. Bei unveränderter Matrix, wie hier bei der Iteration mit Ersatzknotenlasten, entfällt in der zweiten und den folgenden Iterationen die Dreieckszerlegung von $\underline{K}^{e}(\underline{r}^{\rho})$. Diese Dreieckszerlegung muß erst dann wieder durchgeführt werden, wenn $\underline{r}^{\rho}$ geändert wird.
Die Änderungen in $\underline{r}^{\rho}$ bestimmen damit wesentlich die Effizienz der Iteration mit Ersatzknotenlasten.
Im folgenden ist die Iteration an einem einfachen Beispiel dargestellt.

Beispiel 13.5:

Für einen eingespannten Einfeldrahmen mit der in Bild 13.17 gezeigten Elementeinteilung wurde eine Vergleichsberechnung mit der Schnittgrößeniteration und der Iteration über Ersatzknotenlasten durchgeführt. Die Belastung ist proportio-

nal zu einem Lastparameter λ.
Die Ergebnisse der Berechnung sind in Bild 13.17 dargestellt.

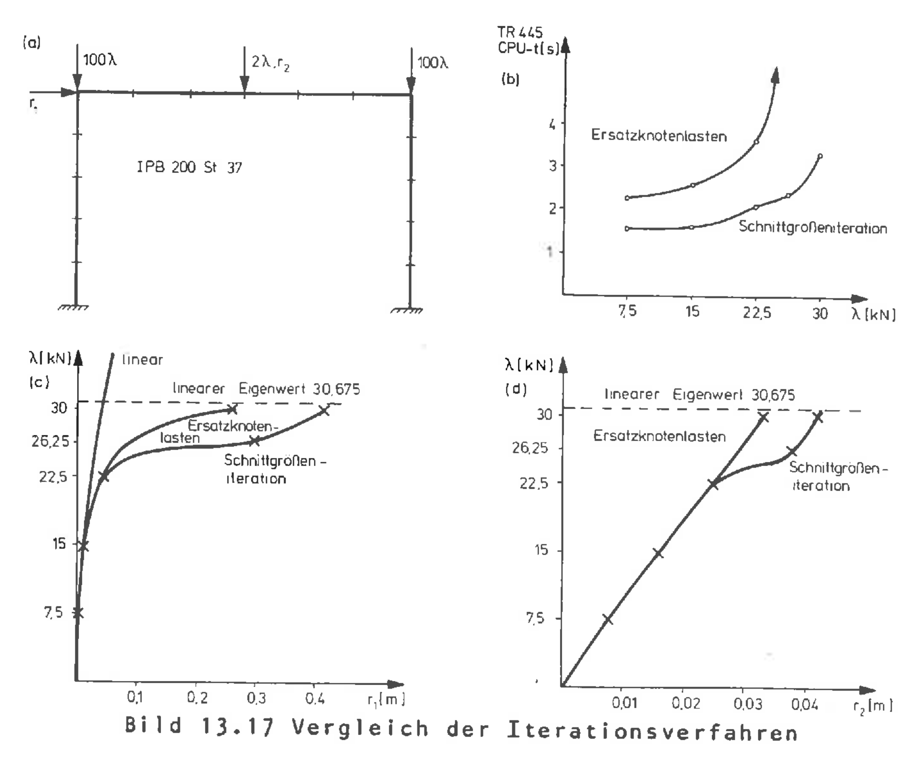


Bild 13.17 Vergleich der Iterationsverfahren

In Bild 13.17 (c) ist die CPU-Zeit für jeden Lastschritt aufgetragen. Die Iteration mit Neuaufbau und Inversion der Steifigkeitsmatrix in jedem Lastschritt benötigt hierbei für einen Lastschritt nahezu die gleiche Rechenzeit; nur im Bereich großer Verformungszuwächse (λ > 22,5) ist hier eine geringfügige Zunahme zu verzeichnen. Die Zeit, die für eine Iteration mit Ersatzknotenlasten benötigt wird, ist hingegen sehr stark von der Größe der Verformungszuwächse abhängig. Im Bereich großer Verformungszuwächse wird das Verfahren unwirtschaftlich. Im Bereich kleiner Verformungszuwächse (im Beispiel λ < 20) kann die Iteration mit Ersatzknotenlasten auch weniger Zeit beanspruchen als die vollständige Iteration. Vor allem bei Tragwerken mit vielen Elemen-

Elementnumerierung Bild 13.18(f)

P_1 = 35,16	P_8 = 0,055
P_2 = 30,09	P_9 = 8,13
P_3 = 17,58	P_{10} = 30,26
P_4 = 14,02	P_{11} = 1,79
P_5 = 0,022	P_{12} = 0,117
P_6 = 4,04	P_{13} = 10,37
P_7 = 19,06	P_{14} = 12,62

[kN, m]

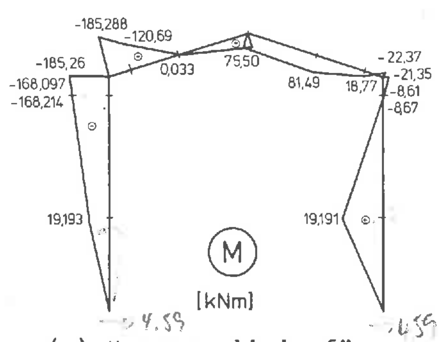
Maße: 1,00; 0,71; 0,29; 0,85; 5,47; 4,18; 0,90; 2,225; 3,125; 3,125; 2,225; 0,90

(a) System und Belastung (alle Lasten sind mit λ ~~f~~ zu multiplizieren)

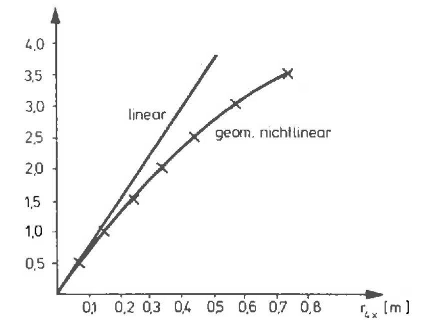
Element	EI [kNm²]	EA [kN]
①, ⑫	$1{,}47198 \cdot 10^4$	$1{,}1802 \cdot 10^6$
②, ⑪	$3{,}94800 \cdot 10^4$	$1{,}4212 \cdot 10^6$
③, ⑩	$5{,}91969 \cdot 10^4$	$1{,}5586 \cdot 10^6$
④, ⑨	$4{,}44402 \cdot 10^4$	$1{,}4511 \cdot 10^6$
⑤, ⑥, ⑦, ⑧	$2{,}47170 \cdot 10^4$	$1{,}3146 \cdot 10^6$

$E = 2{,}1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$

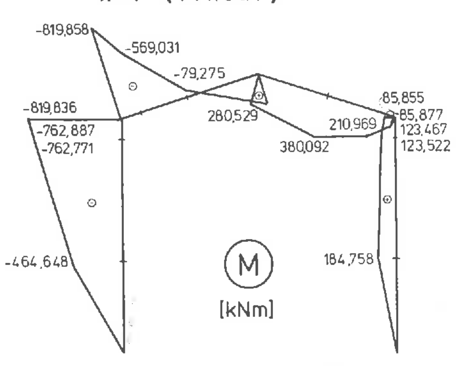
(b) Querschnittswerte



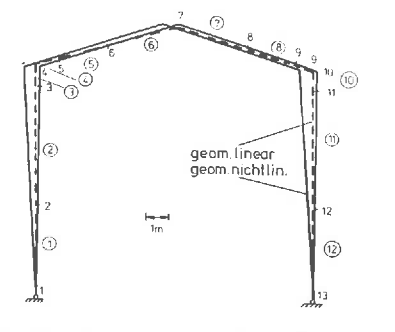
(c) Momentenlinie für λ=1 (linear)



(d) Last-Verformungsdiagramm für r_{4x}



(e) Momentenlinie für λ=3,5 (geom. nichtl.)



(f) Verformungen des Systems für λ=3,5

Bild 13.18 Leichter Hallenbinder

ten ist die Iteration mit Ersatzknotenlasten wirtschaftlicher.

Beispiel 13.6:
Für einen leichten Hallenbinder mit Kranbahn werden die Verformungen und Zustandslinien ermittelt. Das Tragwerk ist mit seinen wesentlichen Abmessungen in Bild 13.18 dargestellt; die Bemessung ist einer ausgeführten Konstruktion entnommem.
Die geometrisch nichtlineare Berechnung erfolgte über Ersatzknotenlasten. Der Hallenbinder ist für 3,5-fach gesteigerte Lasten berechnet worden. Die Last wurde von 0,5 an in 0,5-er Schritten gesteigert. Der lineare Eigenwert des Systems ist 6,11.
In Bild 13.18 (c) ist die Momentenlinie für $\lambda = 1$ bei linearer und in Bild 13.18 (e) die für $\lambda = 3,5$ bei geometrisch nichtlinearer Berechnung dargestellt.
Bild 13.18 (d) zeigt die Last-Verformungskurve für die Referenzverformung r_{4_x}. Die Verformungsfigur für $\lambda = 3,5$ ist in Bild 13.18 (f) dargestellt.

13.8 Bemerkungen zur Anwendung

Stabwerke werden heute in zunehmendem Maße unter Berücksichtigung des Gleichgewichtes am verformten System berechnet. Wir haben deshalb die Probleme der geometrischen Nichtlinearität relativ breit dargestellt. In der Baustatik wird die Berechnung im nichtlinearen Verformungsbereich üblicherweise als *Theorie zweiter Ordnung* (vgl. Chwalla /9/) bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise ist auch zum Teil in den Normblättern (DIN) und den Richtlinien für die Bemessung von Tragwerken festgeschrieben.
Chwalla erklärt diese Bezeichnungsweise am Fachwerk mit großen Verformungen (/9/, Seite 41): "Man bezeichnet diese genauere ... Berechnungsweise, bei der der Einfluß berück-

sichtigt wird, den die elastische Verformung des Tragwerkes auf die Gleichgewichtsbedingungen ... nimmt, als *Theorie zweiter Ordnung*".
Die Vernachlässigungen, die bei der Berechnung möglich und sinnvoll sind, so z.B. die Näherung für die Krümmung eines Biegebalkens, sind nicht direkt mit der "Theorie zweiter Ordnung" verknüpft. Wesentlich ist die Berücksichtigung der elastischen Verformungen in den Gleichgewichtsbedingungen.

Das Problem der Balkenbiegung auf der Grundlage der strengen Krümmungsbeziehung wird von Love /44/ ausführlich behandelt. Es wird seit Euler (1744) als "Problem der Elastica" bezeichnet.
Für die praktische Anwendung genügt jedoch immer die Näherung, die man durch Gleichsetzen der zweiten Ableitung der Biegelinie und der Krümmung erhält, also die *elementare Balkenbiegetheorie* oder auch die *technische Balkenbiegelehre*, wie sie verschiedentlich bezeichnet wird.
Diese Annahme ist die Grundlage der Verformungsbeziehungen der Stabelemente, die wir in den vorangehenden Abschnitten dargestellt haben. Die iterative Berechnung eines Stabwerkes mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix ist deshalb ein *Näherungsverfahren* für die Lösung von Problemen der Theorie zweiter Ordnung. Hierzu muß jedoch bemerkt werden, daß es, mit Ausnahme der elementaren Fälle, keine strengen Lösungen nach der Theorie zweiter Ordnung gibt; es sind immer Vernachlässigungen (z.B. Längsverformungen) erforderlich, und es muß immer ein System nichtlinearer Gleichungen (transzendent) gelöst werden. Dies ist ohne Iteration im allgemeinen nicht möglich.
Die Iteration mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix ist insgesamt eine konsequente Approximation. Mit kleineren Elementunterteilungen ist es sogar möglich, Probleme der "Elastica" näherungsweise zu lösen.
Diese Genauigkeitsforderungen werden jedoch üblicherweise nicht gestellt. Eine sinnvolle Lösung würde man zudem nur

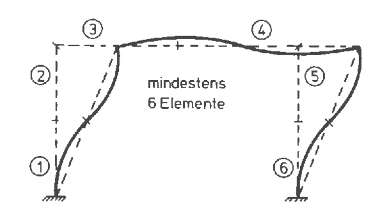


Bild 13.19 Elementapproximation

dann erhalten, wenn die geraden Stabelemente die Verformung genügend genau approximieren, was wiederum zu einer großen Anzahl von Elementen führt.
Die Frage nach der geometrischen Approximation des Verformungszustandes sollte jedoch auch bei den Näherungslösungen nach Abschnitt 13.6 und 13.7 beachtet werden.
Es ist nicht sinnvoll, eine Verformungsiteration unter Berücksichtigung eines verformten Ausgangszustandes durchzuführen, wenn die Biegelinie der Stäbe zwischen den Knotenpunkten einen Krümmungswechsel zeigt (Bild 13.19). In solchen Fällen muß eine kleinere Elementunterteilung gewählt werden. Die aufwendigen Iterationsverfahren führen sonst zu Lösungen, die zwar numerisch korrekt sind, aber keine Aussage über das tatsächliche Tragverhalten darstellen.

14 Aspekte der Programmierung

In den vorangehenden Kapiteln wurden die Berechnungsgrundlagen für Stabwerke in einer für programmgesteuerte Rechenanlagen geeigneten Form dargestellt. Wir haben versucht, den Bezug zu den in Jahrzehnten bewährten Rechenverfahren zu zeigen und verdeutlicht, daß die "Matrizenmethoden" nur eine konsequente Darstellung der bekannten Stabstatik sind.

Die Grundkonzeption aller hier aufgezeigten Rechenverfahren ist die Einteilung der Stabwerke in Elemente. Die Eigenschaften dieser Elemente, dargestellt in Elementmatrizen, sind die Bausteine des Elementkataloges. Die Inzidenz- und Drehungsmatrizen sind das Werkzeug zum Aufbau des Tragwerkes mit einer repräsentativen Darstellung in Form von Matrizengleichungen.

Wir haben damit einen großen Teil der grundlegenden Rechenoperationen der Methode der Finiten Elemente /94/ aufgezeigt.
Die folgenden Ausführungen zur numerischen Lösung und zum Aufbau der Grundgleichungen, zur Struktur der Programme und der Datenverarbeitung bei einer programmierten Berechnung gelten deshalb gleichermaßen für Finite Element Programme. Sie sind zum größten Teil der einschlägigen Literatur entnommen, wenn auch mit vielen Auslassungen und Kürzungen.

14.1 Lösung der Grundgleichungen des Weggrößen- und Kraftgrößenverfahrens

In den allgemeinen Ausführungen haben wir eine Unterteilung in Weggrößenverfahren, Kraftgrößenverfahren, Verfahren der Übertragungsmatrizen und iterative Verfahren gewählt. Diese Unterteilung wird im folgenden bei der Beschreibung der Lösungsverfahren beibehalten. Wir beschränken uns hierbei jedoch auf die Darstellung wesentlicher Gesichtspunkte, die

in groben Zügen den heutigen Stand wiedergeben.
Die Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens erfolgt heute fast ausschließlich mit dem Verfahren von Cholesky (siehe Anhang A2.1.4). Für vollbesetzte Matrizen $\underline{K}_{n \times n}$ erfordern die beiden wesentlichen Rechenoperationen - Dreieckszerlegung und Vorwärts-Rückwärtseinsetzen - die folgende Anzahl von Rechenoperationen:

(a) Dreieckszerlegung

Multiplikationen: $\frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{2} n^2 - \frac{1}{3} n$

Additionen/Subtraktionen: $\frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{6} n$

Quadratwurzeln: n

(b) Vorwärts-Rückwärtseinsetzen

Multiplikationen: $n^2 - n$

Divisionen: n

Additionen/Subtraktionen: $n^2 - n$

Man erkennt, daß die Zahl der Rechenoperationen für die Dreieckszerlegung von der Ordnung n^3 ist; dem steht die Zahl der Rechenoperationen von nur n^2 für das Vorwärts-Rückwärtseinsetzen gegenüber. Die Dreieckszerlegung ist bei mehreren rechten Seiten eine einmalige Rechenoperation, für jede rechte Seite (jeden Lastfall) muß dann nur das Vorwärts-Rückwärtseinsetzen wiederholt werden.

Neben der Rechenzeit ist der Speicherbedarf während eines Rechenvorganges ein entscheidendes Kriterium für die Beurteilung des Rechenverfahrens. Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ ist symmetrisch, es muß also nur eine Symmetriehälfte einschließlich der Diagonalen gespeichert werden. Dieser Speicher reicht für die Zerlegung in eine untere und obere Dreiecksmatrix aus (Bild 14.1).

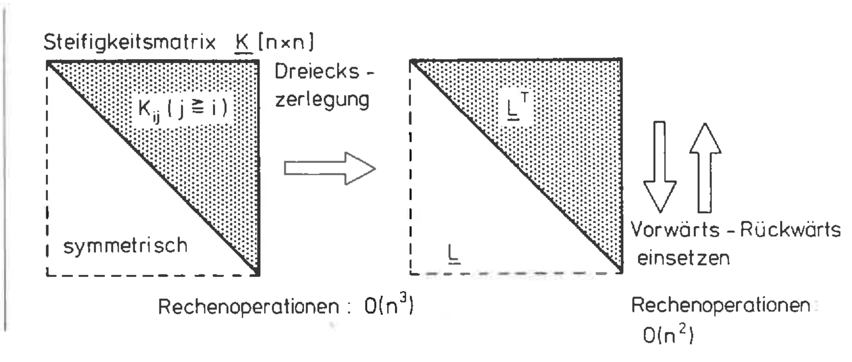


Bild 14.1 Symbolische Darstellung des Cholesky-Verfahrens

Die Programmierung des Verfahrens ist relativ einfach und Standardprogramme gehören heute zur Programmbiliothek eines jeden Rechenzentrums. Ein vollständiges Programm in FORTRAN ist bei Dankert /14/ angegeben.

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ der meisten Tragwerke des konstruktiven Ingenieurbaus ist relativ schwach besetzt. Je nach Dichte der Besetzung kann diese Eigenschaft vorteilhaft ausgenutzt werden. Bei sehr schwacher und unregelmäßiger Besetzung kann ein Lösungsverfahren mit einer "Sparse-Technik" /36/ von Vorteil sein. Hierbei werden alle Nichtnullelemente zusammen mit den Zeilen- und Spaltenzeigern (i, j) gespeichert. Im Verlaufe der Dreieckszerlegung ergeben sich zusätzliche Nichtnullelemente ("fill-ins").
Die Sparse-Technik wird bislang kaum bei der Lösung der Grundgleichung des Weggrößenverfahrens eingesetzt.
Eine weitere Möglichkeit für die Lösung von Problemen mit schwach besetzten Matrizen sind die iterativen Verfahren; wir werden auf dieses Problem an späterer Stelle zurückkommen.
Die schwache Besetzung der Matrizen ermöglicht es jedoch auch, durch Zeilen- und Spaltenaustausch *Bandmatrizen* zu erzeugen (Bild 14.2).
Der Rechenaufwand bei Bandmatrizen ist von der Ordnung $n^2\beta$ für die Dreieckszerlegung und von der Ordnung $n\,\beta$ für das

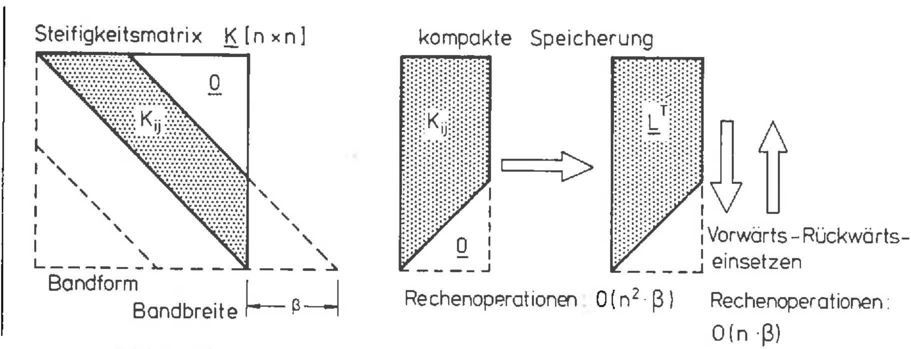


Bild 14.2 Cholesky-Verfahren für Bandmatrizen

Vorwärts-Rückwärtseinsetzen.

Ein vollständiges Programm in FORTRAN ist in /14/ abgedruckt; Bibliotheksprogramme werden in allen größeren Rechenzentren bereitgestellt.
Die Lösung mit vollbesetzten Matrizen und mit Bandmatrizen sind "Stationen" der Entwicklung der Finiten Element Programme. Der letzte Stand und die heute übliche Methode der Lösung sind *Frontlöser* /30/ oder *Bandalgorithmen mit variabler Bandbreite* /32/. Die Dreieckszerlegung und das Vorwärts-Rückwärtseinsetzen auf dieser Grundlage berücksichtigen eine variable Bandstruktur der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}_{n\times n}$. Üblicherweise ergibt sich nämlich auch bei Umordnung der Zeilen und Spalten einer schwach besetzten Steifigkeitsmatrix eine Bandmatrix mit Unregelmäßigkeiten in der Bandbreite (Bild 14.3).

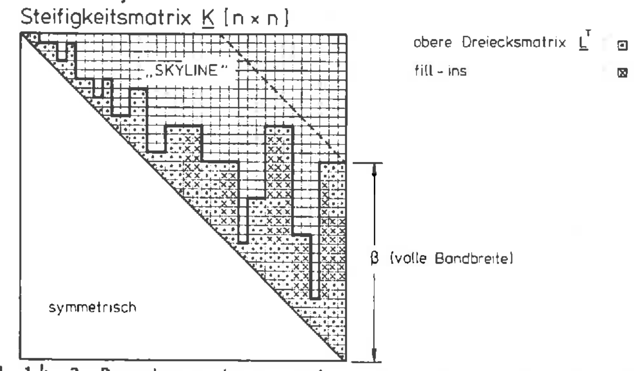


Bild 14.3 Bandstruktur mit variabler Bandbreite

Bei der Dreieckszerlegung ergeben sich zusätzliche Nichtnullelemente (fill-ins), die zusammen mit den ursprünglichen Nichtnullelementen die Skyline der Matrix ergeben. Die Skyline beschreibt den erforderlichen Speicherplatz der Dreieckszerlegung (Bild 14.3). Die Speicherung und Zerlegung erfolgt mit einem Indexfeld mit n Elementen. Jedes Element des Indexfeldes gibt den Abstand an, in welchem sich das von der Diagonale aus gezählte, äußerste Nichtnullelement der Spalte befindet. Die Speicherung und Zerlegung erfolgt insbesondere bei sehr großen Matrizen (oder auf Rechnern mit kleinem Kernspeicher) über externe Datenträger oder in einem virtuellen Kernspeicher.

Von besonderem Vorteil ist bei allen Verfahren die Berücksichtigung der Hypermatrizenstruktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$. Aus der Erzeugung von $\underline{K}$ mit der direkten Steifigkeitsmethode (Abschnitt 6.3) erkennt man, daß $\underline{K}$ Blockzeilenstruktur (-spaltenstruktur) hat. Sind an einen Knoten Elemente unterschiedlichen Typs verknüpft, dann bestimmt das Element mit der maximalen Kantenlänge der Elementsteifigkeitsmatrix die gesamte Blocklänge (Bild 14.4).

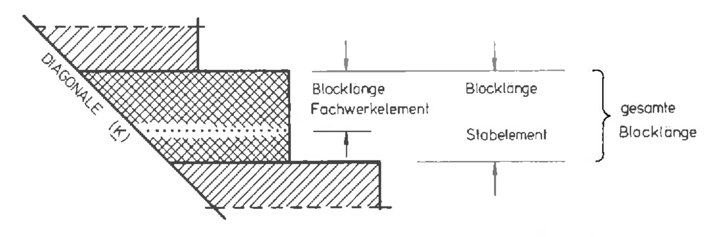


Bild 14.4 Blockstruktur von $\underline{K}$

Die Frontlösungsmethode zusammen mit der Berücksichtigung der Hypermatrizenstruktur ergibt eine erhebliche Einsparung an Rechenzeit.
Einen eindrucksvollen Vergleich gibt Fuchs an /21/: Durch Verbesserung der Speicheraufteilung, Vermeidung von Nulloperationen in Untermatrizen, Programmierung der inneren Schleifen in Maschinensprache und vollständige Ausnutzung

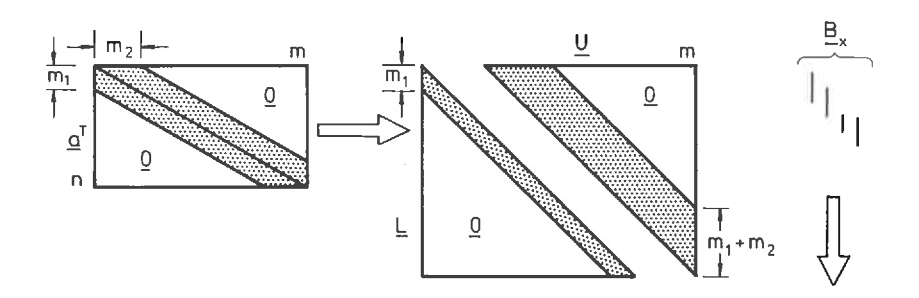
aller sonstigen Möglichkeiten einer modernen Datenverarbeitungsanlage war es demnach (1971) möglich, die Rechenzeit für ein Beispiel mit 4000 Unbekannten und einer mittleren Bandbreite von 420 (max. Bandbreite 600) von 100% auf nur 8% zu reduzieren (Rechenanlage CDC 6600).
Ein vollständiges Programm für die Frontlösungsmethode wird von Irons /30/ angegeben.

Im Vergleich mit dem Weggrößenverfahren wurden die Lösungsverfahren für das *Kraftgrößenverfahren* nur sehr wenig untersucht. Im wesentlichen sind hier drei Varianten zu nennen, die im Laufe der letzten 15 Jahre eine gewisse Bedeutung gewonnen haben und zwar

- die Gauß-Jordan Elimination mit Zeilenpivotsuche und Spaltentausch,
- die Gauß'sche Dreieckszerlegung mit Spaltenpivotsuche und Zeilentausch und
- eine Variante der Dreieckszerlegung zur Erzeugung *kompakter Eigenspannungszustände*.

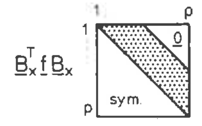
Das erste Verfahren bildet die Grundlage eines Finiten Element Programmes von Denke aus dem Jahre 1962 /15/. Es wurde zugleich in einer Vielzahl von Varianten von Robinson /71/ dargestellt und angewendet.
Eine vollständige Beschreibung des zweiten Verfahrens wird von Thierauf/Topcu /83/ gegeben. Es ist die Grundlage für ein Finites Element Programm mit alternativen Lösungsverfahren /16/.
Das dritte Verfahren als Variante des zweiten liefert Eigenspannungszustände, die möglichst kleine Bereiche des Tragwerkes beeinflussen /85/.
Bezüglich des erstgenannten Verfahrens verweisen wir auf die ausführlichen Darstellungen von Robinson /71/ und auf ein Beispiel für ein Fachwerksystem, das von Przemieniecki (/66/, Seite 206 ff) angegeben wird.
Im folgenden beschränken wir uns auf die Darstellung der wesentlichen Merkmale des zweiten Verfahrens mit der Vari-

ante der kompakten Eigenspannungszustände. Wie beim Weggrößenverfahren wird auch hierbei die Bandstruktur aller Matrizen berücksichtigt. Das Verfahren besteht aus vier Teilschritten, die in Bild 14.5 symbolisch dargestellt sind.



(a) Dreieckszerlegung und Wahl der statisch Unbestimmten

(b) Berechnung der kompakten Eigenspannungszustände aus der oberen Dreiecksmatrix $\underline{U}$



(c) Aufstellen und Lösen der Verträglichkeitsbedingungen (vgl. Cholesky-Verfahren)

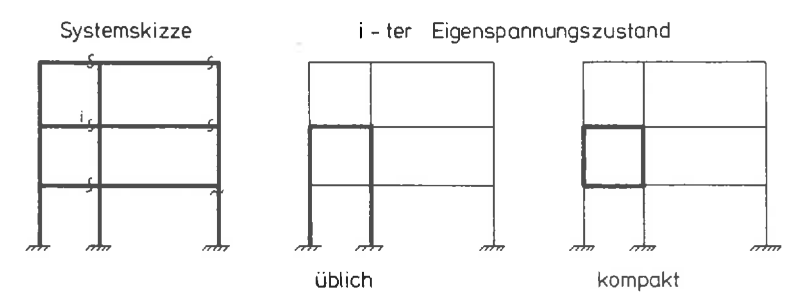
(d) Berechnung der linear unabhängigen Stabendkräfte $\underline{F}$

Bild 14.5 Symbolische Darstellung der Teilberechnungen des Kraftgrößenverfahrens

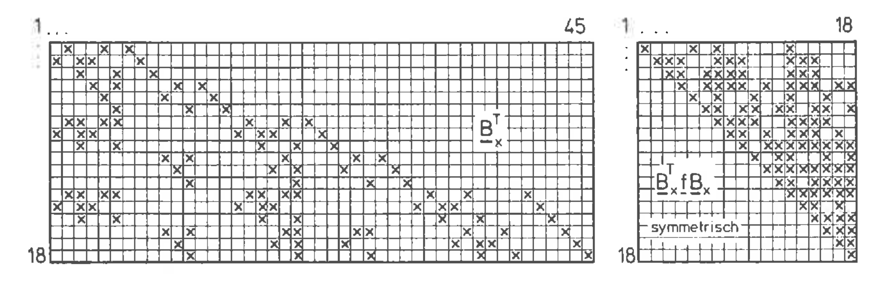
Eine ausführliche Darstellung wird von Topçu /85/ gegeben. Wir zeigen die Ergebnisse einer Berechnung mit kompakten Eigenspannungszuständen an einem Beispiel auf und vergleichen mit den üblichen "langen" Eigenspannungszuständen.

In Bild 14.6 (a) ist das System eines ebenen Stockwerkrahmens dargestellt. Die Schnitte sind in derselben System-

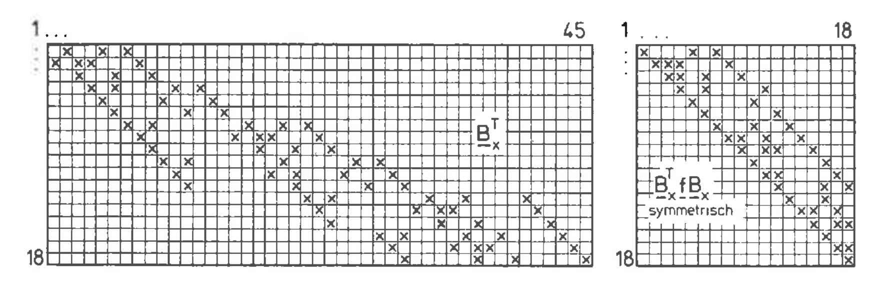
skizze angedeutet; sie ergeben sich durch die Wahl der statisch Unbestimmten, wie sie in Abschnitt 9.3 beschrieben ist.



(a) Systemskizze, Schnittstellen und Einflußbereiche des i-ten Eigenspannungszustandes



(b) Übliche Eigenspannungszustände und Verträglichkeitsbedingungen



(c) Kompakte Eigenspannungszustände und zugehörige Verträglichkeitsbedingungen

Bild 14.6 Vergleich der üblichen mit den "kompakten" Eigenspannungszuständen

Die üblichen Eigenspannungszustände, dargestellt durch die Matrix $\underline{B}_x$ zeigen eine relativ dichte Besetzung und erfordern dadurch einen großen Speicherbedarf. Zugleich ergibt sich ein relativ großer Rechenaufwand für die Aufstellung und Lösung der Verträglichkeitsbedingungen. Dies zeigt sich in der Besetzung der Matrix der Verträglichkeitsbedingungen $(\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x)$ der Kantenlänge ρ (Anzahl der statisch Unbestimmten, hier 18).
Die Nichtnullelemente der Matrizen $\underline{B}_x$ und $\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x$ sind in Bild 14.6 (b) gekennzeichnet.
Dem steht in Bild 14.6 (c) eine relativ schwache Besetzung von $\underline{B}_x$ und eine bandförmige Struktur von $\underline{B}_x^T \underline{f} \underline{B}_x$ gegenüber, wenn man mit kompakten Eigenspannungszuständen rechnet. Der Einflußbereich des i-ten Eigenspannungszustandes ist in der Systemskizze (Bild 14.6 (a)) durch dicke Kanten gekennzeichnet.
Das Verfahren ist automatisiert: Die Wahl der statisch Unbestimmten erfolgt allein aus der Gleichgewichtsmatrix. Das Verfahren der kompakten Eigenspannungszustände ist auch auf Finite Elemente anwendbar; Beispiele für räumliche Systeme, Scheiben und Platten gibt Topçu /85/ an.
Trotz des Fortschrittes, der durch kompakte Eigenspannungszustände erzielt wurde, sollte die Anwendung auf folgende Fälle beschränkt werden:

(1) Redundanz ρ kleiner als Kantenlänge n von $\underline{K}$;
(2) Spezielle Probleme der Bemessung oder der Anwendung im nichtlinearen Werkstoffbereich.

Ein vollständiges FORTRAN-Programm des Rechenverfahrens aus /85/ ist im Anhang A2.1.6 angegeben.

Als dritte Möglichkeit zur Lösung statischer Probleme betrachten wir die *iterativen Verfahren*. Bekannte Anwendungen in der Statik und Dynamik sind das Verfahren von *Gauß-Seidel* /67/, die *Relaxationsverfahren* /96/ und die *Methode der konjugierten Gradienten* /67/. In Abschnitt 11.2 wurde gezeigt, daß das Verfahren von Gauß-Seidel die Grundlage des

Kani-Verfahrens für den iterativen Momentenausgleich in Rahmenkonstruktionen ist. Dieses Verfahren wird in der Praxis auch heute noch sehr hoch geschätzt und besitzt gewisse Vorteile in der Anwendung. Es ist sehr anschaulich und bietet mit der Momentenverteilung anhand einer Systemskizze die Möglichkeit, den Kräfteverlauf und den Einfluß von Steifigkeitsänderungen geschickt zu erfassen. Für die Lösung der hier betrachteten Probleme überwiegen jedoch insgesamt gesehen die Nachteile des Verfahrens.
Alle iterativen Verfahren haben einen wesentlichen Nachteil bei der Lösung von Gleichungssystemen mit mehreren rechten Seiten (Lastfällen). Die gesamte Iteration ist für jeden Lastfall getrennt und von Neuem durchzuführen. Da in der Praxis des konstruktiven Ingenieurbaus fast immer mehrere Lastfälle zu berechnen sind, entsteht ein relativ großer Rechenaufwand.
Auch für eine einmalige Lösung ist der Rechenaufwand im Vergleich zu den direkten Lösungsverfahren schon relativ hoch.
Für eine vollbesetzte symmetrische Koeffizientenmatrix $\underline{K}_{n \times n}$ benötigt man z.B. mit der Methode der konjugierten Gradienten /67/

etwa $n^3 + 5\,n^2$ Multiplikationen oder Divisionen
und $n^3 + 6\,n^2$ Additionen oder Subtraktionen.

Im Vergleich dazu erfordert das Verfahren von Cholesky nur etwa 1/6 dieser Rechenoperationen.
Beim Verfahren von Gauß-Seidel benötigt man für eine Iteration etwa $2n^2 - 2$ Multiplikationen und Additionen /87/.
Da bei diesem Verfahren die Anzahl der Iterationen stark von der Konvergenz abhängig ist, kann die Anzahl der Gesamtoperationen nicht angegeben werden. Eine schnelle Konvergenz ist nur dann zu erwarten, wenn die Matrix gut konditioniert und diagonal dominant ist.
Eine ähnliche Situation ergibt sich bei der Anwendung von Relaxationsverfahren.
Ein allgemeiner Vergleich zwischen den iterativen und den

direkten Lösungsverfahren ist damit nur bei der Methode der konjugierten Gradienten möglich. Bei dieser Methode erhält man nämlich in höchstens n Schritten die genaue Lösung, wenn Rundungsfehler der Rechenmaschine ausgeschlossen werden. "Die Methode (der konjugierten Gradienten) wird vorteilhafter, wenn die Koeffizientenmatrix viele Nullen enthält. Jedoch gibt es auch hier Abarten der Eliminationsschemata, die auch diese Situation in vielen Fällen ausnützen können ..." (Ralston/Wilf /67/, Bd. 1, Seite 117). Die von Ralston/Wilf erwähnten Varianten der direkten Lösungsverfahren sind die oben dargestellten Bandalgorithmen und Frontlösungsverfahren.

Abgesehen von speziellen Problemstellungen, die an sich schon eine iterative Lösung erfordern, *werden deshalb heute eindeutig die direkten Lösungsverfahren den iterativen vorgezogen.*

Vollständige Programme für die iterative Lösung nach Gauß-Seidel und für die Methode der konjugierten Gradienten sind bei Ralston/Wilf /67/ abgedruckt (ALGOL). Ein Vergleich der direkten und iterativen Verfahren bezüglich des Rechen- und Speicheraufwandes gibt Westlake an /87/.

14.2 Bemerkungen zur Lösung des Stabilitätsproblemes

Für die Lösung des Eigenwertproblemes, wie es sich bei der Stabilitätsberechnung (Kapitel 12) ergibt, stehen heute eine Reihe erprobter Rechenverfahren zur Verfügung /88/.

Die Matrizen $\underline{K}^e$ und $\underline{K}^g$ der Eigenwertgleichung des Stabilitätsproblems (12.40)

$$(\underline{K}^e + \lambda\, \underline{K}^g)\, \underline{r} = \underline{0}$$

sind symmetrisch und besitzen die gleiche Bandstruktur, die sich bei der Grundgleichung der Weggrößenverfahren ergibt. $\underline{K}^e$ ist positiv definit, $\underline{K}^g$ ist im allgemeinen positiv semidefinit (d.h. es gilt $\underline{r}^T\, \underline{K}^g\, \underline{r} \geq 0$ für alle $\underline{r} \neq \underline{0}$). Bei der

Auswahl der Lösungsverfahren sollte darauf geachtet werden, daß die Bandstruktur der Matrizen nicht zerstört wird.

Eine Möglichkeit zur Reduktion des allgemeinen Eigenwertproblemes mit symmetrischen Bandmatrizen wird von Crawford /12/ beschrieben (siehe auch Anhang A2.2). Der dort angegebene Algorithmus transformiert das allgemeine Eigenwertproblem auf das spezielle Eigenwertproblem mit symmetrischer Bandmatrix $\underline{A}$ und der Bandbreite der Eingangsmatrizen $\underline{K}^e$ und $\underline{K}^g$. Die Transformation erfordert Rechenoperationen in der Größenordnung von $n^2\beta$, mit β als Bandbreite von $\underline{K}^e$.
Die Lösung des speziellen Eigenwertproblems kann dann mit den bekannten Verfahren /88/ durchgeführt werden. Es sind dies z.B.
die Givens-Reduktion der symmetrischen Bandmatrix auf Tridiagonalform /88/, und die
Berechnung eines einzelnen, z.B. des größten (kleinsten), Eigenwertes durch Bisektion (Given's Method of Bisection /88/).

Mit diesem Verfahren wurden in /55/ eine Vielzahl von Eigenwertproblemen bei der Stabilitätsuntersuchung ausgesteifter Platten gelöst.
Falls zu den Eigenwerten auch die Eigenvektoren berechnet werden sollen, ist eine Rücktransformation der Eigenvektoren des speziellen Eigenwertproblemes erforderlich.
Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung des kleinsten (größten) Eigenwertes ist die iterative Lösung mit dem *von Mises'schen Iterationsverfahren* (/14/, siehe auch Anhang A2.2.3). Mit diesem Verfahren erhält man zugleich eine Näherung für den zum kleinsten (größten) Eigenwert gehörigen Eigenvektor. Das von Mises'sche Iterationsverfahren ist in seiner Leistungsfähigkeit mit dem oben genannten Verfahren für die Lösung des Stabilitätsproblemes vergleichbar. Eine ausführliche Darstellung der Lösungsverfahren findet sich in /96/.

14.3 Rundungsfehler und numerische Stabilität

Die Gleichungssysteme, die man bei der Berechnung von Tragwerken erhält, können eine beachtliche Größenordnung erreichen. Systeme mit mehreren tausend Unbekannten sind heute keine Seltenheit. Jede Lösung eines Gleichungssystems führt zu Rundungsfehlern, die beim Rechnen mit endlicher Stellenzahl unvermeidlich sind. Man erhält damit anstelle einer Lösung $\underline{r}$ nur eine Näherung $\underline{\tilde{r}} = \underline{r} + \Delta\underline{r}$, für die gilt:

$$\underline{K}\,\underline{\tilde{r}} = \underline{R} + \Delta\underline{R}$$

$$\text{oder} \quad \underline{K}\,\Delta\underline{r} = \Delta\underline{R} \; .$$

Eine zweite Lösung mit der rechten Seite $\Delta\underline{R}$, dem Defektvektor

$$\Delta\underline{R} = \underline{K}\,\underline{\tilde{r}} - \underline{R} \; ,$$

ist nur dann sinnvoll, wenn mit größerer Genauigkeit, d.h. mit höherer Stellenzahl, gerechnet wird (Nachiteration).
In jedem Fall sollte man sich jedoch bei jeder Lösung eines größeren Systemes den Defektvektor ausrechnen. Es empfiehlt sich bei einer Lösung mit dem Weggrößenverfahren die Gleichgewichtsbedingungen und bei einer Lösung mit dem Kraftgrößenverfahren die Verträglichkeitsbedingungen zu überprüfen:

	Verfahren	*Kontrolle*
Weggrößen:	$\underline{K}\,\underline{r} = \underline{R}$	$\underline{a}^T\,\underline{F} = \underline{R}$ (Gleichgewicht)
Kraftgrößen:	$\underline{a}^T\,\underline{F} = \underline{R}$,	
	$\underline{B}_x^T\,\underline{f}\,\underline{F} = \underline{0}$	$\underline{a}\,\underline{r} = \underline{v}$ (Verträglichkeit)

Die Größe der Abweichung wird über eine Norm verglichen; sinnvolle Vergleiche sind die Normen:

$$\max_i \{|\Delta R_i|\} \quad \text{oder} \quad \|\Delta\underline{R}\| = \sqrt{\Delta\underline{R}^T\,\Delta\underline{R}} \; .$$

Ergeben sich größere Abweichungen, dann muß das zugrunde-

liegende Stabwerk überprüft werden. In solchen Fällen haben einzelne Elemente entweder unsinnige Abmessungen oder Querschnittswerte.

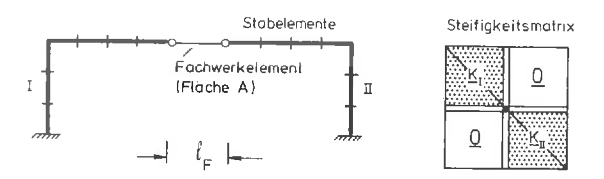


Bild 14.7 Unzulässige Idealisierungen durch Stabelemente ($\ell_F \to 0$)

Für das in Bild 14.7 dargestellte System würden sich z.B. dann numerische Schwierigkeiten ergeben, wenn sich Fläche A und Länge ℓ_F des Fachwerkelementes wesentlich von denen der Stabelemente unterscheidet.
Die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems würde dann mit schwacher Kopplung durch das Fachwerkelement in zwei Blöcke I und II zerfallen. Es wäre also unsinnig, ein Querkraft- und Momentengelenk durch einen Fachwerkstab, wie in Bild 14.7 gezeigt, idealisieren zu wollen.
Bei solchen und ähnlichen schlecht idealisierten Systemen unterscheiden sich die Beträge der Diagonalelemente von $\underline{K}$ um mehrere Zehnerpotenzen. Dies führt zu größeren Rundungsfehlern und meist auch zu unsinnigen Bemessungen. Als *Faustregel für Stabwerke* gilt:
Wenn

$$\min |K_{ii}| / \max |K_{ii}| < 10^{-4} ,$$

dann sind größere Rundungsfehler bei der Lösung des Gleichungssystems oder des Eigenwertproblemes zu erwarten. Genauere Möglichkeiten zur Abschätzung werden von Irons /29/ angegeben.

Ein wichtiges Maß für die Beurteilung der Lösung eines linearen Gleichungssystemes ist die *Konditionszahl*. Eine bekannte Konditionszahl ist die Hadamard'sche Konditionszahl

K_H /95/ (Anhang A1.8):

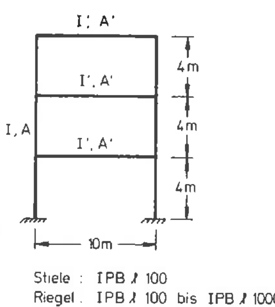
$$K_H = \det(\underline{K}) / \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (K_{ij})^2} \qquad (14.1)$$

Diese Konditionszahl kann bei der Dreieckszerlegung relativ einfach berechnet werden und ist eine Möglichkeit zur Beurteilung der Gleichungssysteme. Die Konditionszahl liegt zwischen 0 und 1:

$K_H = 0$: $\underline{K}$ ist singulär

$K_H = 1$: optimale Kondition.

Die Konditionszahl K_H ist invariant gegenüber einer Multiplikation der Zeilen mit Faktoren ($\neq 0$). Eine Skalierung der Matrix zur Verbesserung der Kondition K_H ist also nicht sinnvoll. Durch Skalierung läßt sich zwar der Rundungsfehler verkleinern, die Kondition der Matrix kann aber dadurch nicht verbessert werden.
Das in Bild 14.8 dargestellte Beispiel gibt eine Vorstellung von der Größenordnung der Hadamard'schen Konditionszahl.



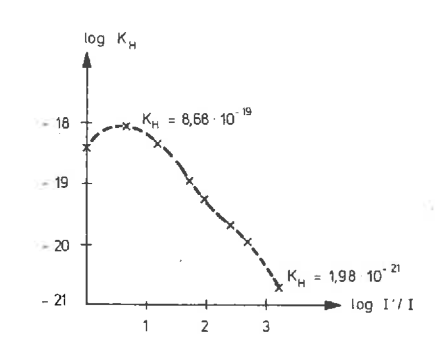
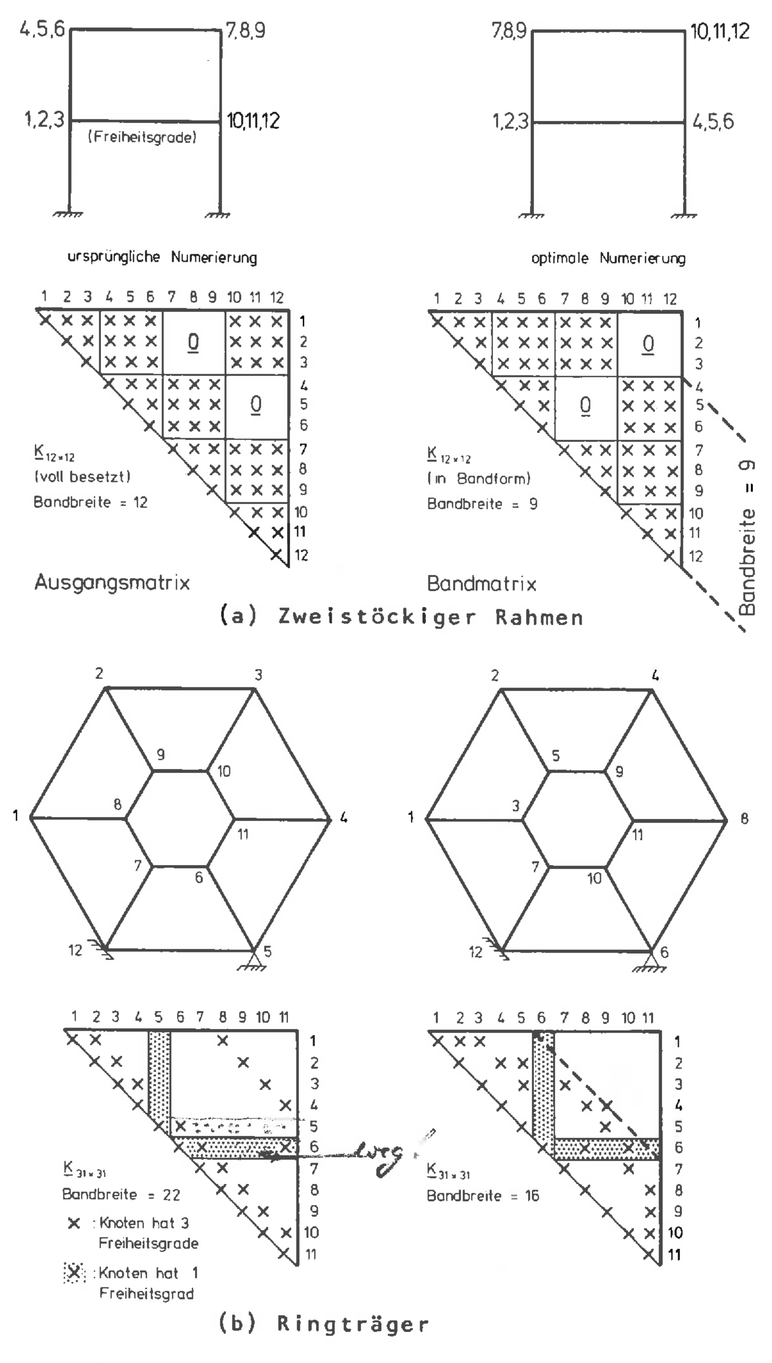


Bild 14.8 Konditionszahlen der Steifigkeitsmatrix (logarithmische Darstellung)

Bei schlecht konditionierten Matrizen muß deshalb das zugrundeliegende mechanische Modell überprüft werden. Eine



(a) Zweistöckiger Rahmen

(b) Ringträger

Bild 14.9 Besetzung der Steifigkeitsmatrix

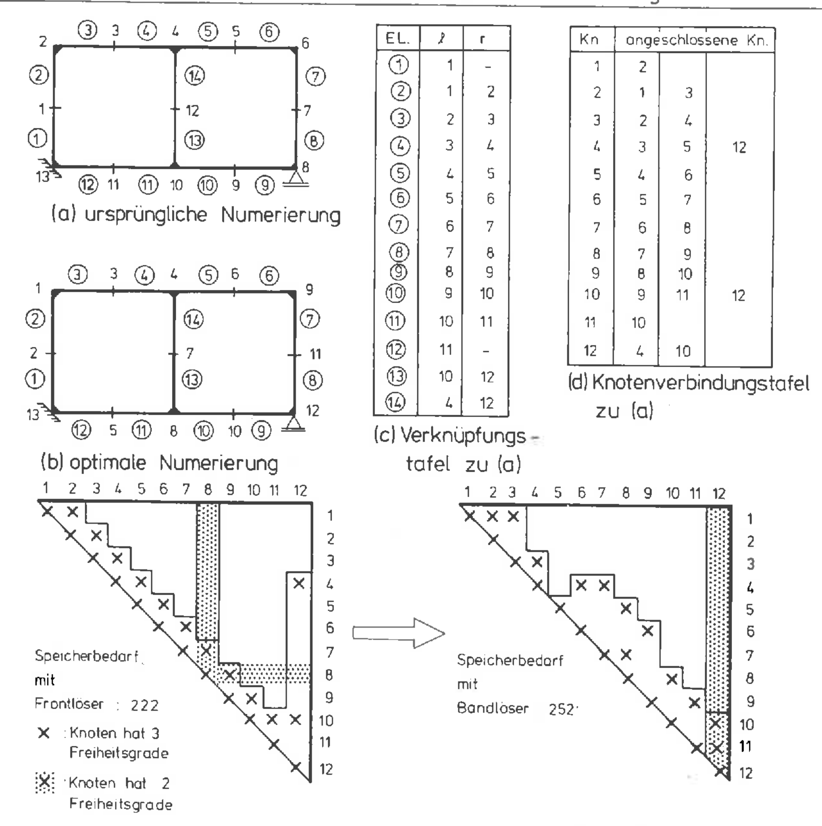
sinnvolle Lösung kann entweder durch eine Korrektur der Idealisierung oder der Bemessung erreicht werden oder in manchen Fällen auch durch eine Berechnung von Teilstrukturen.

14.4 Bandbreitenreduktion durch Umnumerierung

In den vorangehenden Abschnitten wurde die Bandstruktur der Steifigkeitsmatrix als ein wesentliches Merkmal herausgestellt. Diese Bandstruktur ergibt sich durch die Verknüpfung der Freiheitsgrade der Verschiebungen:
Sind die Freiheitsgrade mit den Indizes i und j nicht über einen Stab verbunden, erhält das zugehörige Element K_{ij} der Steifigkeitsmatrix den Wert Null.
Die Indizierung der Freiheitsgrade ist weitgehend beliebig; sie muß nur bei 1 beginnen und fortlaufend bis n sein. Damit hat man die Möglichkeit, durch Umnumerierung der Freiheitsgrade die Besetzung und damit die Bandbreite von $\underline{K}$ zu beeinflussen. Wir zeigen dies an einem Beispiel.

Beispiel 14.1:
Besetzung der Steifigkeitsmatrix eines Stockwerkrahmens und eines Ringträgers nach Bild 14.9.
Die Besetzung von $\underline{K}$ erfolgt nach folgendem Schema:
- Ein Freiheitsgrad ist immer mit sich selbst verbunden.
- Ein Freiheitsgrad ist mit einem zweiten verbunden, wenn beide in demselben Knotenpunkt definiert sind oder wenn sie durch einen Stab verbunden sind.

Jede Verbindung kennzeichnet ein Nichtnullelement (x).
Da üblicherweise bei Stabtragwerken die Freiheitsgrade an einem Knoten fortlaufend numeriert werden, kann die Umordnung auch über Knotennummern erfolgen. Dies ist am Beispiel des Ringträgers (Bild 14.9 (b)) gezeigt. Von diesem vereinfachten Schema der Numerierung wird bei den Algorithmen zur Reduzierung der Bandbreite ausgegangen (/22/, /10/). In



EL.	l	r
①	1	-
②	1	2
③	2	3
④	3	4
⑤	4	5
⑥	5	6
⑦	6	7
⑧	7	8
⑨	8	9
⑩	9	10
⑪	10	11
⑫	11	-
⑬	10	12
⑭	4	12

Kn	angeschlossene Kn.		
1	2		
2	1	3	
3	2	4	
4	3	5	12
5	4	6	
6	5	7	
7	6	8	
8	7	9	
9	8	10	
10	9	11	12
11	10		
12	4	10	

(a) ursprüngliche Numerierung

(b) optimale Numerierung

(c) Verknüpfungstafel zu (a)

(d) Knotenverbindungstafel zu (a)

(e) Ausgangsmatrix K

(f) optimale Bandmatrix K

Bild 14.10 Optimale Numerierung am Beispiel eines Vierendeelträgers im Vergleich mit Frontlöser

allgemeiner Form läßt sich das Problem wie folgt darstellen:

Aufgrund einer Ausgangsnumerierung der Knoten und Elemente ist die Verknüpfungstafel (Inzidenztafel) bekannt. Es ist eine Element-Knotenzuordnung, d.h. zeilenweise werden für jedes Element die zugehörigen Knoten angegeben. Die Elemente und Knoten sind fortlaufend und bei 1 beginnend numeriert.

Aus der Inzidenztafel wird zunächst eine Knotenverbindungstafel aufgestellt: In aufsteigender Folge werden zeilenweise alle Knoten zusammen mit den durch Stäbe angeschlossenen

Knoten aufgelistet.
Diese beiden Schritte sind in Bild 14.10 für einen Vierendeelträger durchgeführt.
Die Vertauschung erfolgt für ein Tragwerk mit n Knoten nach folgendem Verfahren:

(a) Berechne die Bandbreite m_0 der ursprünglichen Numerierung aus der maximalen Knotendifferenz,
(b) Wir beginnen bei *Knoten* 1 und numerieren alle "abliegenden" Knoten neu mit 2, 3, ..., i_1.
(c) Die weitere Numerierung wird am Knoten i_1 fortgeführt. Alle abliegenden Knoten, die noch nicht umnumeriert wurden, werden mit i_1+1, i_1+2, ..., i_2 neu numeriert.
(d) Es folgen die Knoten i_1, ..., n, für die das in (c) beschriebene Verfahren durchgeführt wird.

Damit ist *eine* Umnumerierung abgeschlossen und die neue Bandbreite kann berechnet werden, wir bezeichnen sie mit m_1. Alle Knoten tragen die neue Numerierung.
Das Verfahren wird nun für den Knoten 2 bei (b) neu begonnen, und die Schritte (b), (c) und (d) werden ausgeführt. Man erhält die neue Bandbreite m_2.
Es folgt der Knoten 3. Die Schritte (b), (c) und (d) werden ausgeführt. Man erhält die neue Bandbreite m_3 u.s.w.
Das Verfahren wird forgesetzt, bis m_n erreicht ist. Die "optimale" Bandbreite ist

$$m_{opt} = \min\,(m_0, \ldots, m_n)\ .$$

Das Ergebnis einer systematischen Umnumerierung ist in Bild 14.10 (f) in Form der "optimalen" Bandmatrix $\underline{K}$ dargestellt.
Ein Vergleich des Speicheraufwandes, der bei Anwendung der Frontlösungsmethode (Frontlöser) und einer Bandlösungsmethode entsteht, ergibt, daß die optimale Bandmatrix mehr Speicherplatz benötigt, als die Matrix für den Frontlöser. Das führt zu der Erkenntnis, daß eine Umnumerierung nicht immer vorteilhaft ist. Im allgemeinen erhält man mit einer Umnumerierung jedoch Bandmatrizen mit relativ kleiner Bandbreite. Ein vollständiges Programm in FORTRAN wird von

Collins /10/ angegeben.

14.5 Teilstrukturen und Makromatrizen

Bei der Darstellung der Verfahren zur Lösung größerer Gleichungssysteme wurde auf die Notwendigkeit der externen Speicherung hingewiesen. Bei größeren Systemen wird je nach Größe des verfügbaren Kernspeichers der Rechenanlage nur ein "Block" einer Matrix im Kern des Rechners bearbeitet, der Rest wird auf einem externen Speicher (Platte, Trommel, Band) abgelegt (Bild 14.11).

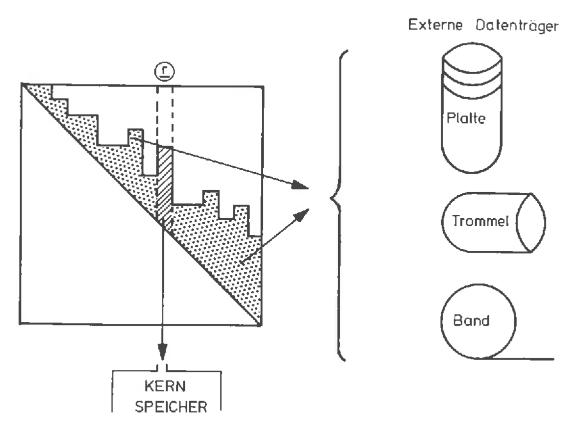


Bild 14.11 Physikalische Segmentierung

Zu jedem Zeitpunkt eines Programmablaufes wird mit dieser Art der Gleichungslösung immer nur ein Teilbereich des Systemes betrachtet, dem eine durch die Blocklänge bestimmte Anzahl von Freiheitsgraden $\underline{r}$ zugeordnet ist. Das Rechenprogramm "segmentiert" das Tragwerk: Wir bezeichnen dies deshalb als *physikalische Segmentierung* im Gegensatz zu der *mechanischen Segmentierung*, bei welcher die Freiheitsgrade $\underline{r}$ einer mechanisch sinnvollen Teilstruktur ("substructure") zugeordnet werden. Diese Teilstrukturen werden bei der Festlegung der Elemente berücksichtigt.

Die Teilstruktur kann als *Makroelement* bezeichnet werden

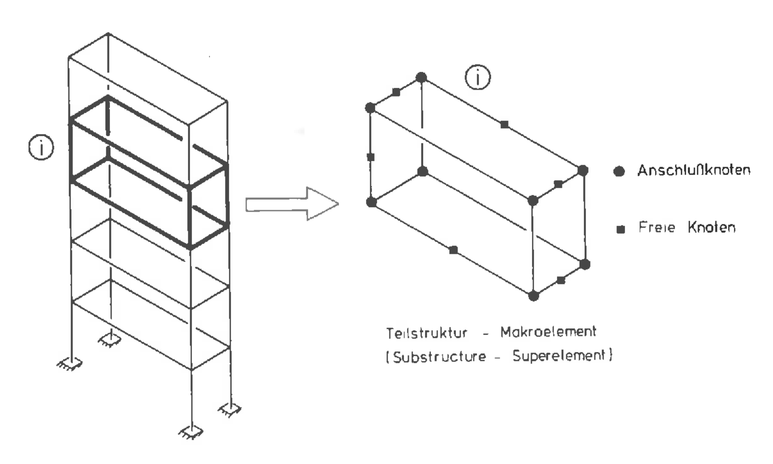


Bild 14.12 Mechanische Segmentierung

(Bild 14.12); sie besitzt Knotenpunkte, die sie mit den benachbarten Makroelementen verbindet (L) und freie Knotenpunkte (F) ohne Verbindung zu benachbarten Makroelementen.

Im folgenden stellen wir den Rechengang nach dem Weggrößenverfahren dar und beziehen uns dabei auf eine Darstellung von Dankert /14/. Die vollständige Steifigkeitsmatrix der Teilstruktur (i) wird mit $\underline{K}^i$ bezeichnet. Sie wird mit den bekannten Verfahren (Kapitel 6) aufgestellt. Für diese Teilstruktur gilt:

$$\underline{K}^i \; \underline{r} = \underline{R}' \; . \qquad (14.2)$$

Mit den freien Verformungen $\underline{r}_F$ und den Verformungen der Anschlußknoten $\underline{r}_L$ ist dies gleichbedeutend mit:

$$\underline{k}_{LL} \; \underline{r}_L + \underline{k}_{LF} \; \underline{r}_F = \underline{R}_L$$

$$\text{und} \quad \underline{k}_{FL} \; \underline{r}_L + \underline{k}_{FF} \; \underline{r}_F = \underline{R}_F \; . \qquad (14.3)$$

Gleichung (14.2) wird also so aufgestellt, als ob die Teilstruktur ein eigenes Tragwerk darstellt, das mit äußeren Lasten $\underline{R}_L$ (unbekannt) und $\underline{R}_F$ (bekannt) belastet ist.
Für die Ableitung der Steifigkeitsmatrix des Makroelementes gehen wir davon aus, daß jede Teilstruktur mindestens einen

freien Knoten besitzt.
Aus der zweiten Gleichung von (14.3) erhält man

$$\underline{r}_F = \underline{k}_{FF}^{-1}(\underline{R}_F - \underline{k}_{FL}\ \underline{r}_L) \qquad (14.4)$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$\underline{k}_{LL}\ \underline{r}_L + \underline{k}_{LF}\ \underline{k}_{FF}^{-1}(\underline{R}_F - \underline{k}_{FL}\ \underline{r}_L) = \underline{R}_L \ .$$

Durch Umformung ergibt sich:

$$(\underline{k}_{LL} - \underline{k}_{LF}\ \underline{k}_{FF}^{-1}\ \underline{k}_{FL})\underline{r}_L = \underline{R}_L - \underline{k}_{LF}\ \underline{k}_{FF}^{-1}\ \underline{R}_F \ .$$

oder $\underline{k}^i\ \tilde{\underline{u}}^i = \tilde{\underline{S}}^i$ (14.5)

mit $\underline{k}^i = (\underline{k}_{LL} - \underline{k}_{LF}\ \underline{k}_{FF}^{-1}\ \underline{k}_{FL})$,

$\tilde{\underline{u}}^i \equiv \underline{r}_L$

und $\tilde{\underline{S}}^i = \underline{R}_L - \underline{k}_{LF}\ \underline{k}_{FF}^{-1}\ \underline{R}_F$.

Gleichung (14.5) ist die Steifigkeitsbeziehung für ein Makroelement, $\underline{k}^i$ die Elementsteifigkeitsmatrix des Makroelementes und $\tilde{\underline{S}}^i$ sind die Randkräfte des Makroelementes. Die Elementverformungen $\tilde{\underline{u}}^i$ (in globalen Koordinaten) werden bei der Berechnung des Gesamtsystemes wie die Verschiebungen eines Stabelementes behandelt. Die Knotenverformungen $\tilde{\underline{r}}$ des Gesamtsystemes sind die Knotenverformungen der Anschlußknoten ($\underline{r}_L$) aller Makroelemente.
In der Inzidenzmatrix und der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Tragwerkes werden nur Freiheitsgrade der Anschlußknoten $\underline{r}_L$ verknüpft.
Die Lösung ergibt die Verformungen der Anschlußknoten $\underline{r}_L$.
Die freien Verschiebungen $\underline{r}_F$ werden nach (14.4) (mit bekanntem $\underline{r}_L$) berechnet.
Bei der Berechnung von $\underline{k}^i$ nach (14.5) sollte die Inversion von $\underline{k}_{FF}$ vermieden werden. Die für (14.5) erforderlichen Produkte sollten über eine Dreieckszerlegung von $\underline{k}_{FF}$ berechnet werden. Die Berechnung von $\underline{k}^i$ unter Berücksichti-

gung besonders rationeller Matrizenoperationen wird von Dankert /14/ dargestellt.
Eine Zerlegung in Teilstrukturen ist in vielen Fällen von beträchtlichem Vorteil gegenüber einer physikalischen Segmentierung:

- Es ist möglich, Teilstrukturen abzuspeichern und bei weiteren Berechnungen wiederzuverwenden,
- Die Variantenuntersuchung ist einfacher,
- Die Dateneingabe wird bei geometrisch ähnlichen Teilstrukturen vereinfacht.

14.6 Dateneingabe und Darstellung der Ergebnisse

In den Anfängen der "Computer-Statik" vor etwa 20 Jahren wurden die Rechner hauptsächlich zum Aufbau und zur Lösung umfangreicher Gleichungssysteme eingesetzt. Die Eingabe der Daten war meist sehr zeitaufwendig und umständlich, die Ausgabe der Rechenergebnisse vielfach unübersichtlich. Durch die moderne Datentechnik hat sich diese Situation entscheidend geändert.
Wir erklären einige der heute üblichen Grundzüge der Dateneingabe am Beispiel von Stabwerken.
Die Dateneingabe erfolgt mit den üblichen Eingabegeräten

- Lochkarten
- Lochstreifen
- Datensichtgeräte.

Die übliche Form der Dateneingabe für kleinere Datenmengen ist heute das *Datensichtgerät*. Die übliche Eingabeform ist formatfrei.
Es ist zweckmäßig, die Eingabedaten eines Tragwerkes in zwei Gruppen einzuteilen:

- die geometrischen Daten des Gesamtsystems einschließlich der kinematischen und statischen Randbedingungen (Lasten),
- die Eigenschaften der Elemente.

Mit den Eigenschaften wird üblicherweise eine Vorverarbeitung (Pre-Processor) gestartet. Typische Teilaufgaben des Pre-Processors sind:

- Die graphische Darstellung der Eingabedaten (Beispiel Bild 14.13),
- Die Überprüfung der Eingabe mittels redundanter Eingabedaten und einfache Vollständigkeitskontrollen,
- Die Aufbereitung oder Umordnung der Daten für die weitere Berechnung.

Die Eingabedaten werden unabhängig vom Eingabegerät üblicherweise in einer *Datenbank* gespeichert. Spätere Änderungen und Ergänzungen können dann in den gespeicherten Eingabedaten erfolgen.

Die graphische Darstellung der Eingabedaten ist ein wichtiges Hilfsmittel für das Erkennen von Eigabefehlern. Beispiele für die Darstellung räumlicher Stabwerke zeigt Bild 14.13. Die meisten Pre-Processoren für Finite Element Programme ermöglichen eine räumliche Darstellung mit beliebigen Blickpunkten und Perspektiven.

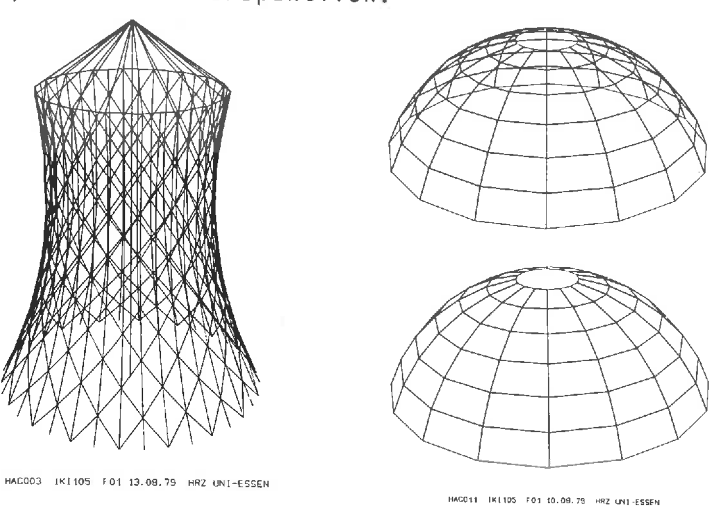


Bild 14.13 Darstellung eines Seilnetzkühlturms und einer Rippenschale

Zur Dateneingabe wird auch das Generieren von Daten ge-

zählt, d.h. das Erzeugen von Daten nach einer bestimmten Vorschrift. Datengeneratoren für Stabwerke können z.B. die Eingabedaten einer Teilstruktur in einer vorgeschriebenen Anzahl wiederholen.
Die Eingabe, Kontrolle und Änderung von Daten kann über einen Interaktiven Konstruktionsplatz erfolgen, wie er z.B. von Flessner /19/ beschrieben wird.
Eine zusammenfassende Darstellung einer sinnvollen Datenaufbereitung für größere Datenmengen gibt Kenngott /34/ (vgl. Bild 14.14).

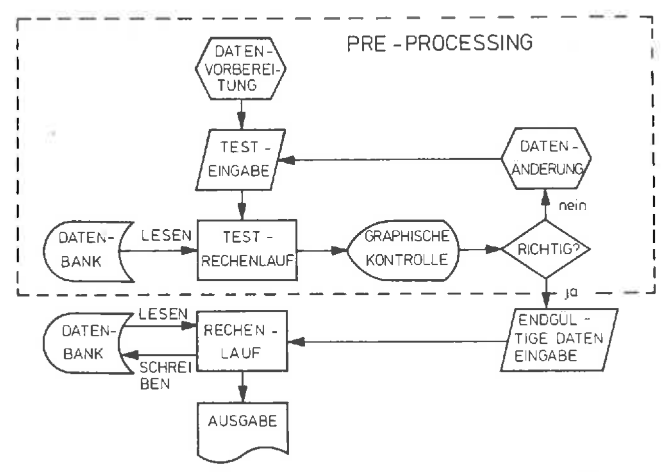


Bild 14.14 Interaktives Arbeiten im BATCH-Modus nach Kenngott /34/

Jede *Ausgabe* eines Programmes muß mit einer vollständigen Auflistung der Eingabedaten beginnen. Dies ist besonders wichtig für die Erstellung statischer Berechnungen. Die Anforderungen an "Elektronische Standsicherheitsberechnungen" sind in technischen Baubestimmungen festgelegt /26/. Die übliche Form der Ausgabe sind *Druckerprotokolle*, evtl. mit Speicherung der Ergebnisse und Zwischenergebnisse in einer Datenbank für eine Nachverarbeitung (Post-Processor). Der Leistungsumfang des Post-Processing ist unterschiedlich: Er reicht von der sinnvollen Reduzierung der Ausgabe auf wesentliche Ergebnisse über einfache Spannungsberechnungen

(z.B. Randspannung bei Stäben) und der Überlagerung von Lastfällen bis zu einfachen Bemessungsaufgaben und zur konstruktiven Durchbildung und kompletten Ausführungszeichnungen (/59/, /60/).

Bei einfachen Systemen, wie z.B. Durchlaufträgern und Rahmen ist die graphische Darstellung von Zustandslinien zweckmäßig. Ein Beispiel für diese Ausgabeform zeigt Bild 14.15.

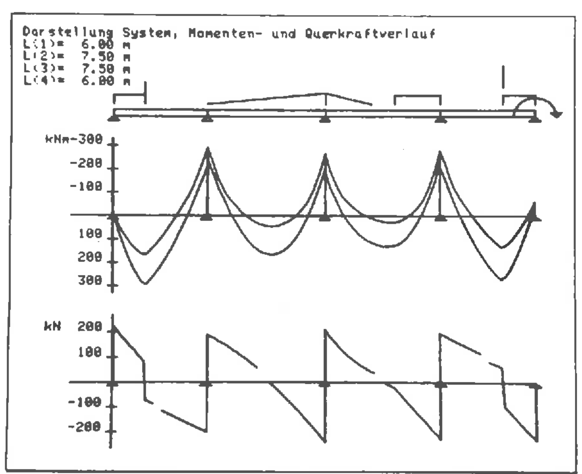
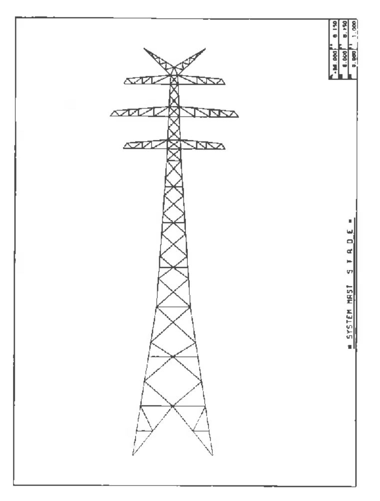


Bild 14.15 Graphische Darstellung von Zustandsgrößen nach Spiegel /76/

Weitere anschauliche Kontrollausgaben sind mit der Darstellung des verformten Tragwerkes oder der graphischen Kennzeichnung des Maßes der Beanspruchung einzelner Bauglieder möglich. Ein Beispiel für die graphische Ausgabe eines verformten Stabwerkes zeigt Bild 14.16.

Die Anforderungen, die an eine Ausgabe gestellt werden müssen, sind /77/

- Die Ausgabe ist flexibel, Zwischenergebnisse sind auf Wunsch verfügbar,
- die Ausgabe kann selektiv, z.B. in bestimmten Schnitten erfolgen,
- selektive graphische Ausgaben sind möglich.



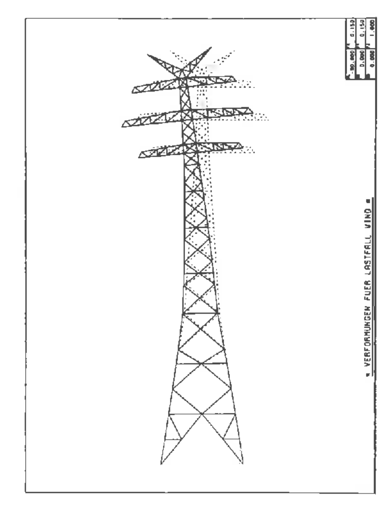


Bild 14.16 Gittermast

14.7 Programmaufbau

In den letzten zehn Jahren wurde eine Vielzahl von Finiten Element Programmen mit mehr oder minder großem Anwendungsbereich entwickelt. Die wesentlichen und allgemein akzeptierten Anforderungen, die heute an ein Finites Element Programmsystem gestellt werden, beschreiben Lopez, u.a. wie folgt /43/:

(1) Flexibilität bei der Tragwerksbeschreibung: Der Benutzer sollte verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl haben. Die Entscheidung über die Tragwerksbeschreibung (Idealisierung) sollte unter Berücksichtigung der einfachen Handhabung und der numerischen Effizienz getroffen werden. Mehrstufige und rekursive Teilstrukturen sollten möglich sein.

(2) Eine große und leicht erweiterungsfähige Elementbibliothek sollte vorhanden sein. Der Stand der Entwicklung ändert sich schnell; neue und allgemeinere Elemente müssen sich leicht einpassen lassen.

(3) Erweiterungsfähigkeit: Große Programmsysteme werden

nicht geschrieben, sie entwickeln sich. Erweiterung und Unterhaltung nehmen oft 80% der Gesamtleistung in Anspruch. Da Mitarbeiter während der Entwicklung wechseln, muß das System so aufgebaut sein, daß Änderungen einfach und "unabhängig" durchgeführt werden können.

(4) Einfache Handhabung: Ein Programmsystem sollte leicht zu handhaben sein. Es sollte wie ein System aussehen, nicht wie ein "Eintopf" von Programmen und Datenträgern, die wie ein Puzzle zusammenpassen. Das System sollte auf einer höheren Sprachebene automatisiert sein. Der Benutzer sollte nicht unnötige "Mikro"- Anweisungen geben müssen, um den Lösungsprozess zu steuern, und er sollte auch nicht die Ablaufprogramme schreiben müssen.

(5) Maschinenabhängigkeit: Eine sehr ungünstige Eigenschaft großer Programmsysteme ist der Trend zu einer starken Maschinenabhängigkeit. Maschinenabhängigkeit sollte minimiert und begrenzt werden.

(6) Restartfähigkeit: Mit der Popularität der Finiten Element Methode wuchsen die Problemgrößen sehr schnell an. Die Benutzung externer Datenträger (Platte, Trommel) wuchs entsprechend an, und es wurde aus einer Vielzahl von Gründen erforderlich, Restart-Prozeduren einzubauen. Diese sollten automatisiert sein und einen geringen Aufwand für den Einbau erfordern.

(7) Kontrollierte Benutzung externer Datenträger: In einem guten Programmsystem muß eine vernünftige Kontrolle der Datenträger, die für die Lösung der Probleme erforderlich sind, möglich sein. Die einzige Ausnahme hiervon ist die Benutzung des Plattenspeichers, die mit der Problemgröße anwachsen sollte.

(8) Interaktive Ablaufsteuerung: Interaktive Rechenmöglichkeiten sind eine sinnvolle Erweiterung der Programmsysteme. Sie sind eine unabdingbare Forderung für die Steuerung graphischer Programme und für nichtlineare Berechnungen.

Ähnliche grundsätzliche Anforderungen an ein modernes Programmsystem nennt Schrem /75/ und gibt auch eine weitreichende Beschreibung der Daten- und Programmstruktur.
Ein heute allgemein anerkanntes Prinzip der Programmstrukturierung ist der *modulare Aufbau*. Hierbei wird das gesamte Programm durch eine Reihe kleinerer Einheiten, den Moduln, aufgebaut. Ein *Modul* besitzt gewisse, definierte Merkmale:

- Er ist eine unabhängige, in sich abgeschlossene Programmeinheit (Subroutine, Prozedur, Programmabschnitt),
- Er kann unabhängig vom übrigen Programm in die Maschinensprache übersetzt und getestet werden;
- Jeder Modul kann aufgerufen werden und kann gegebenenfalls andere Moduln aufrufen;
- Jeder Modul ist eine abgeschlossene Programmeinheit, nach dem Aufruf wird der Programmablauf direkt nach dem Statement, welches den Aufruf erzeugt, fortgesetzt.

Die modulare Struktur kann nach Hierarchien gegliedert sein; die Moduln einer höheren Ebene können solche auf einer niedrigeren Ebene aufrufen. Auch hier muß jedoch sichergestellt sein, daß nach "Abarbeiten" der Aufruffolge in das Rahmenprogramm über den Modul auf der höchsten Ebene zurückgekehrt wird. Dies ist symbolisch in Bild 14.17 dargestellt.

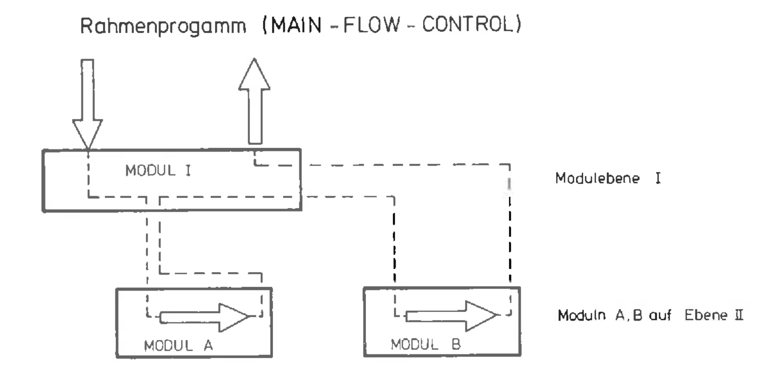


Bild 14.17 Hierarchie des Modulaufrufes

Die Vorteile der modularen Struktur wurden von Weber /86/ am Beispiel des modularen Programmes MISS-SMIS aufgezeigt. Es seien hier nur einige genannt: Die modulare Struktur ergibt

- eine einfachere Programmpflege und erleichtert Ergänzungen,
- eine einfachere Programm- und Datenstruktur,
- Vereinfachungen beim Austesten des Programmes,
- zuverlässige Programme,
- Erleichterungen bei der Programmdokumentation und der Ergänzung derselben.

Den prinzipiellen Aufbau eines Programmsystemes mit modularer Struktur stellt Withum /90/, wie in Bild 14.18 gezeigt, dar.

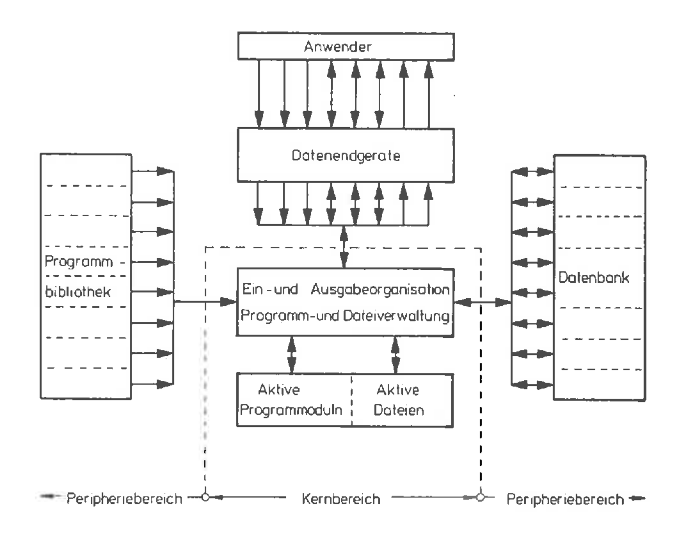


Bild 14.18 Prinzipieller Aufbau eines Programmsystemes nach Withum /90/

Der Kernbereich wird vom Benutzer über Datenendgeräte angesprochen. Mit dem Kernbereich sind die Programmbibliothek und die Datenbank, beide mit modularer Struktur, verknüpft. Die Programmbibliothek und die Datenbank werden den peripheren Speichern (Platte, Trommel) zugewiesen. Zur Verdeut-

lichung geben wir hier die Ein- und Ausgabeorganisation und die Programm- und Datenverwaltung an, wie sie bei einer Berechnung nach der Methode der Finiten Elemente erforderlich ist. Wir beziehen uns hierbei auf die Programmbibliothek FEABL (Finite Element Analysis Basic Library /57/). Ein Hauptprogramm (Main-Process-Control) läßt sich hiernach in 8 wesentliche Progammstufen unterteilen (Bild 14.19).

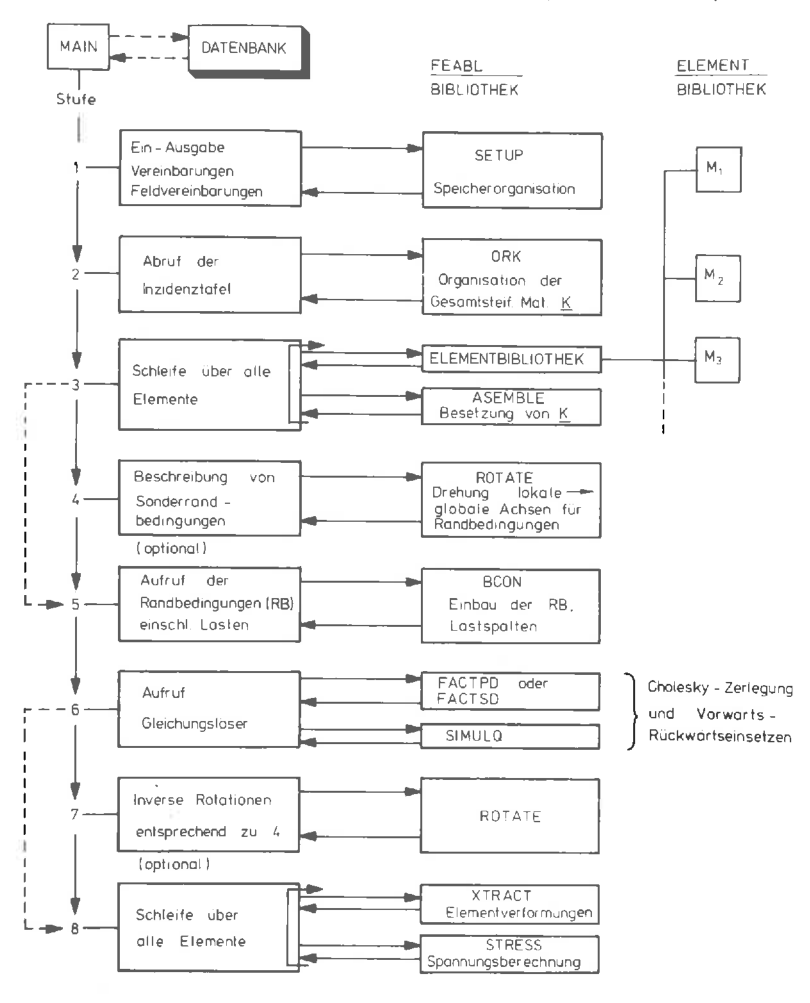


Bild 14.19 Organisation eines Programmablaufes nach FEABL /57/

Für Stabtragwerke mögen diese Systematisierung und der konsequente modulare Aufbau als übertrieben erscheinen. Es zeigt sich jedoch, daß auch ein einfaches "Fachwerkprogramm" - selbst wenn es nur für Übungszwecke geschrieben wird - in kürzester Zeit ergänzt und erweitert werden muß. Unabhängig von den Vorteilen, die beim Austesten des Programmes entstehen, zeigt sich dann bei jeder Programmänderung und Erweiterung die Überlegenheit einer klaren Programmstruktur.

14.8 Programmbeschreibung und Testhilfen

Ein Programm ohne klare und ausführliche Beschreibung ist wertlos. Dies gilt nicht nur für Programmsysteme, es gilt gleichermaßen für jeden Modul und für jedes Test- oder Pilotprogramm, das auf eine spezielle Aufgabe ausgerichtet ist.

Diese Erkenntnis hat zu dem Versuch geführt, die "Dokumentation von DV-Programmen im Bauwesen" zu normen (DIN 66230, Entwurf August 1976). Die Norm (Teil 5) ist gegliedert nach

Geltungsbereich, Zweck, Begriffe,
Kurzbeschreibung,
Benutzerhandbuch und
Datenverarbeitungs-Handbuch (DV-Handbuch) mit detaillierten Angaben über den Umfang aller Leistungen.

Gerade für die praktische Anwendung sind derartige Angaben eine unabdingbare Forderung.

Die Anforderungen an ein Finites Element Programm aus der Sicht prüffähiger Berechnungen werden von Stein /77/ zusammenfassend dargestellt.

Die "Vorläufigen Richtlinien für das Aufstellen und Prüfen Elektronischer Standsicherheitsberechnungen" /26/ wurden 1965 beraten und abgefaßt. Sie sind heute in sechs Ländern der Bundesrepublik Deutschland (Bayern, Hamburg, Hessen,

Niedersachsen, Rheinland-Pfalz, Schleswig-Holstein) bauaufsichtlich eingeführt (vgl. dazu auch Hees /26/).
Sowohl die "Dokumentation ..." (DIN 66230) als auch die "Vorläufigen Richtlinien ..." ermöglichen es dem Benutzer, die Leistungsfähigkeit und den Einsatzbereich eines Programmsystemes auf einheitlicher Grundlage zu beurteilen. Die Ergebnisse eines Programmablaufes behalten trotzdem häufig den vielzitierten "black-box" Charakter und bergen damit ein erhöhtes Fehlerrisiko in sich. Als häufigste Fehler werden von Reyer /69/ genannt:

- Idealisierungsfehler im Berechnungsmodell,
- Diskretisierungsfehler,
- Datenfehler,
- Programmfehler,
- Fehler in Benutzerprogrammen,
- Maschinenfehler,
- numerische Fehler,
- Ausgabefehler.

Der Benutzer eines ausreichend dokumentierten Programmsystemes mit flexiblen Ausgabemöglichkeiten kann die meisten dieser Fehler erkennen und beseitigen. Aus der Sicht der Verfasser sollte die ingenieurmäßige Kontrolle, die empirische Beurteilung der Ergebnisse, die wichtigste *Testhilfe* sein. Sie erfordert gründliche Kenntnisse der mechanischen Zusammenhänge. Weitere wesentliche Kontrollen werden durch die graphischen Ein- und Ausgabehilfen, durch Gleichgewichts- und Formänderungskontrollen ermöglicht. Je nach Grad der Bedeutung der Rechenergebnisse für die Sicherheit des Gesamtsystemes sollten auch Vergleichsberechnungen mit anderen, unabhängigen Programmen in Betracht gezogen werden.

Anhang

A1 Matrizen und Vektoren

A2 Spezielle Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und für Eigenwertprobleme

A3 Elementkatalog

A1 Matrizen und Vektoren

Im folgenden werden einige Definitionen und Rechenregeln für Matrizen und Vektoren zusammenfassend dargestellt. Die Ausführungen beschränken sich auf elementare Grundlagen, wie sie für das Verständnis der Matrizenmethoden für Stabwerke erforderlich sind.

A1.1 Definition der Matrix

Unter einer *Matrix der Ordnung* $[m \times n]$ versteht man $m \cdot n$ Elemente in einer rechteckigen Anordnung zu m Zeilen und n Spalten. Der Begriff Matrix kennzeichnet also die Elemente und ihre Anordnung.
Matrizen werden durch unterstrichene Buchstaben (z.B. $\underline{A}$ oder $\underline{a}$) bezeichnet, die Ordnung wird in Klammern oder als Indizes angegeben:

$$\underline{A}\,[m \times n] \quad \text{oder} \quad \underline{A}_{m \times n} \quad \text{und} \quad \underline{a}\,[m \times n] \quad \text{oder} \quad \underline{a}_{m \times n} \;.$$

Die *Elemente* einer Matrix können reelle oder komplexe Zahlen, Funktionen oder auch selbst wieder Matrizen sein. Man bezeichnet die Elemente im allgemeinen mit dem selben Buchstaben wie die Matrix und gibt die Zeilen- und Spaltenzahl durch Indizes an (A_{ij} oder a_{ij}).
Die Zeilen und Spalten werden immer fortlaufend numeriert, in der Regel beginnt man mit 1. Damit stellt sich eine Matrix $\underline{A}_{m \times n}$ wie folgt dar:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

oder auch:

$$\underline{A} = [A_{ij}] ; \quad i = 1, 2, \ldots, m ; \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Auf die Angabe der Ordnung wird verzichtet, wenn der Bereich der Indizes bekannt ist.
Im folgenden werden einige *spezielle Matrizen* erklärt:

(1) *Die Nullmatrix:*

$$\underline{A} = [A_{ij}] , \quad A_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j$$

(2) *Die quadratische Matrix*

$\underline{A}_{n\times n}$

besitzt eine gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten.

(3) *Die symmetrische Matrix*
ist eine spezielle quadratische Matrix mit

$$\underline{A} = [A_{ij}], \quad A_{ij} = A_{ji} \quad \text{für alle } i \neq j$$

(*schiefsymmetrisch:* $A_{ij} = -A_{ji}$ für alle $i \neq j$)

(4) *Die Diagonalmatrix:*
Als *Hauptdiagonale* einer Matrix bezeichnet man die Elemente in der Diagonalen der rechteckigen Anordnung:

$$\begin{bmatrix} x & & & & & & & \\ & x & & & & & & \\ & & x & & & & & \\ & & & x & & & & \\ & & & & x & & & \end{bmatrix}$$

x: Elemente der Diagonalen

Eine Diagonalmatrix ist eine *quadratische Matrix,* bei der nur die Hauptdiagonalelemente ungleich Null sind:

$$\underline{D} = \operatorname{diag}\{d_i\} ,$$

$$D_{ii} = d_i \quad \text{für alle } i \quad \text{und}$$

$$D_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j .$$

(5) *Die Einheitsmatrix*
ist eine spezielle Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente gleich Eins sind:

$\underline{I} = [I_{ij}]$

$I_{ii} = 1$ für alle i und

$I_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

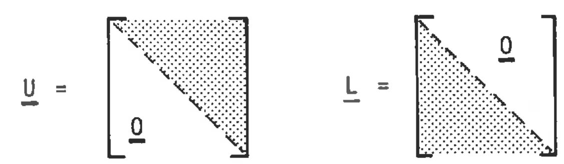
Mit $\underline{I}_n$ bezeichnen wir die Einheitsmatrix der Ordnung $[n \times n]$.

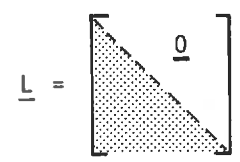
(6) *Die einzeilige (einspaltige) Matrix*
ist eine Matrix, die nur aus einer Zeile (Spalte) besteht. Man bezeichnet sie auch als *Zeilenmatrix (Spaltenmatrix)*.

(7) *Die obere (untere) Dreiecksmatrix*
ist eine spezielle quadratische Matrix, bei der nur die Elemente oberhalb (unterhalb) der Hauptdiagonalen und die der Hauptdiagonalen ungleich Null sind:

$\underline{U}$ = obere Dreiecksmatrix (Upper)

$\underline{L}$ = untere Dreiecksmatrix (Lower)



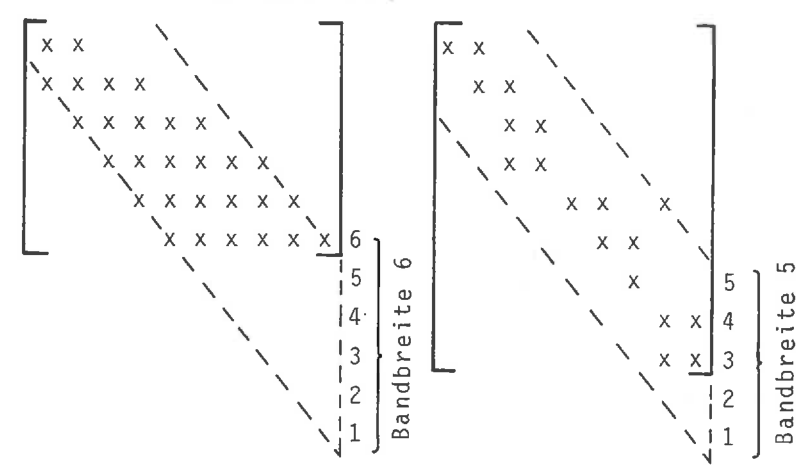


(8) *Die Permutationsmatrix (Vertauschungsmatrix):*
Eine Einheitsmatrix mit vertauschten Zeilen (oder Spalten) wird als Permutationsmatrix bezeichnet.

$$\underline{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{V}_4 = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

(9) *Die Bandmatrix:*

Eine Matrix, bei der nur die Elemente in einer Umgebung der Hauptdiagonalen ungleich Null sind, bezeichnet man als Bandmatrix:



Die *Bandbreite* einer Bandmatrix wird im allgemeinen auf eine quadratische Matrix bezogen, bei rechteckigen bandförmingen Matrizen wird zu einer quadratischen Matrix "ergänzt".

In Sonderfällen kann die Bandbreite jedoch auch anders definiert werden (Abschnitt 14.1). *Tridiagonalmatrizen* sind spezielle Bandmatrizen mit der Bandbreite 3.

(10) *Die Spur einer quadratischen Matrix*

ist die Summe aller Hauptdiagonalelemente:

$$\underline{A} = [A_{ij}] , \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$sp(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

(11) *Die Hypermatrix ("Übermatrix")*

ist eine Matrix, deren Elemente selbst Matrizen sind:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

(12) *Die Hyperdiagonalmatrix*
ist eine Diagonalmatrix, deren Elemente selbst Matrizen sind:

$$\operatorname{diag}\{\underline{a}_i\} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & & & \\ & \underline{a}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

A1.2 Rechenregeln für Matrizen

Vertauscht man bei einer Matrix die Zeilen mit den Spalten und umgekehrt, so erhält man aus einer [m×n]-Matrix $\underline{A}$ die *transponierte Matrix* $\underline{A}^T$ der Ordnung [n×m]:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Das Transponieren entspricht einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Es gilt:

$$(\underline{A}^T)^T = \underline{A} \; .$$

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Im folgenden geben wir eine
Zusammenfassung der wichtigsten Rechenregeln:

(1) *Multiplikation mit einem Skalar:*
Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit diesem Skalar multi-

pliziert:

$$\lambda\ \underline{A} = \underline{A}\ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \dots & \lambda A_{mn} \end{bmatrix}$$

(2) *Die Summe (Differenz) zweier* $[m\times n]$*-Matrizen* $\underline{A} = [A_{ij}]$ und $\underline{B} = [B_{ij}]$ ist definiert als die Summe (Differenz) der Elemente beider Matrizen.
Es können nur Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl addiert (subtrahiert) werden.

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \quad \text{entspricht} \quad [C_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]$$

$$(\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} \quad \text{entspricht} \quad [C_{ij}] = [A_{ij} - B_{ij}])\ .$$

Zwei Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind nur dann gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind.

Beispiel: Summe zweier Matrizen

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

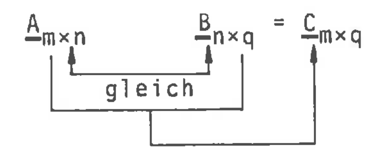
$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+1 \\ 0+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) *Das Produkt einer* $[m\times n]$*-Matrix* $\underline{A}$ *und einer* $[n\times q]$*-Matrix* $\underline{B}$
ist definiert als die $[m\times q]$-Matrix

$$\underline{C} = \underline{A}\ \underline{B}\ , \quad \text{mit} \quad C_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu}\, B_{\nu k}\ ,$$

$$i = 1, \dots, m\ ;\ k = 1, \dots, q\ .$$

Das Matrizenprodukt $\underline{A}\ \underline{B}$ *ist nur definiert, wenn die erste Matrix so viele Spalten besitzt wie die zweite Zeilen.*



Die Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*

$$(\underline{A}\ \underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\ \underline{C}) = \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ ,$$

distributiv

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\ \underline{B} + \underline{A}\ \underline{C}$$

aber *nicht kommutativ*

$$\underline{A}\ \underline{B} \neq \underline{B}\ \underline{A}\ .$$

(vorausgesetzt, daß überhaupt $\underline{A}\ \underline{B}$ und $\underline{B}\ \underline{A}$ definiert sind).
Für die Einheitsmatrix gilt aber:

$$\underline{I}_n\ \underline{A}_{n\times m} = \underline{A}_{n\times m}\ \underline{I}_m\ .$$

Die Transponierte eines Produktes ist:

$$(\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \ldots\ \underline{H})^T = \underline{H}^T\ \ldots\ \underline{C}^T\ \underline{B}^T\ \underline{A}^T\ .$$

Matrizenprodukte können übersichtlich nach dem *Falkschen Schema* /95/ durchgeführt werden. Dies ist am Beispiel des Produktes $\underline{A}\ \underline{B} = \underline{C}$ dargestellt.

Beispiel:

				1	-1	1	0
			$\underline{B}_{n\times q}$	0	2	0	1
				1	0	1	1
				0	-1	0	0
1	2	3	0	4	3	4	5
2	-1	1	-1	3	-3	3	0

Man schreibt hierzu die Matrizen in dem oben dargestellten Schema an. Für die Berechnung des Elementes C_{ij} ist die i-te Zeile und die j-te Spalte komponentenweise zu multiplizieren und die Produkte sind zu addieren. Das Element C_{ij} steht im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile von $\underline{A}$ und der j-ten Spalte von $\underline{B}$.

(4) *Das Produkt einer Permutationsmatrix* $\underline{V}_n$ *mit einer* $[n \times m]$*-Matrix* $\underline{A}$ ergibt eine Zeilenvertauschung in $\underline{A}$:

$$\underline{V}_n \underline{A} = \underline{\tilde{A}} \quad \text{(Zeilentausch)}$$

analog:

$$\underline{A} \underline{V}_m = \underline{\tilde{A}} \quad \text{(Spaltentausch)} .$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix}$$

A1.3 Vektor, Vektornorm, Skalarprodukt und dyadisches Produkt

Eine einspaltige Matrix, deren Elemente reelle Zahlen sind, bezeichnen wir als *Vektor* $\underline{a}_{n \times 1}$.
Die Komponenten a_i von $\underline{a}$ sind die Elemente der einspaltigen Matrix.
Eine einzeilige Matrix wird als *transponierter Vektor* definiert.
Vektor $\underline{a}$ und transponierter Vektor $\underline{a}^T$ werden wie folgt dargestellt:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}^T = [\, a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \,] .$$

Die Komponenten eines n-dimensionalen Vektors

$$\underline{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

sind die Koordinaten eines *Punktes* im n-dimensionalen euklidischen Raum. Der Nullpunkt ist der Koordinatenursprung.

Es gibt zwei Sonderfälle des Matrizenproduktes:

(1) *Das Skalarprodukt:*

Das Produkt eines transponierten Vektors $\underline{a}^T_{1\times n}$ mit einem Vektor $\underline{b}_{n\times 1}$ ergibt eine skalare Größe:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \; .$$

Das Skalarprodukt ist *kommutativ:*

$$\underline{a}^T \underline{b} = \underline{b}^T \underline{a} \; .$$

Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\underline{a}^T \underline{b} = 0 \qquad (\underline{a} \perp \underline{b}) \; .$$

Ist einer der Vektoren im Skalarprodukt variabel ($\underline{x}$), dann erhält man eine *Linearform:*

$$l = \underline{a}^T \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \; .$$

Die Norm eines Vektors ist sein Betrag:

$$\|\underline{a}\| \equiv |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^T \underline{a}} \; .$$

Die Norm der Differenz zweier Vektoren ist der Abstand der beiden Punkte, welche durch die beiden Vektoren dargestellt werden:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})^T (\underline{a} - \underline{b})} \; .$$

Beispiel: Zweidimensionale Vektoren

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix} \quad \text{Abstand } d = \sqrt{9/4} = 3/2 \; .$$

Als zweiten Sonderfall des Matrizenproduktes erhält man:

(2) *Das dyadische Produkt:*

Das Produkt eines Vektors $\underline{a}_{n\times 1}$ mit einem transponierten Vektor $\underline{b}^T_{1\times m}$ ist eine $n\times m$ -Matrix der Form:

$$\underline{a}\,\underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [\, b_1 \quad b_2 \; \dots \; b_m \,] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{bmatrix}$$

Das dyadische Produkt ist *nicht kommutativ:*

$$\underline{a}\,\underline{b}^T \neq \underline{b}\,\underline{a}^T \; .$$

A1.4 Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren

Gegeben ist eine $[n\times m]$-Matrix $\underline{A}$; wir bezeichnen ihre Vektoren mit $\underline{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, m$.
Das Produkt aus $\underline{A}$ und einem Vektor $\underline{u}_{m\times 1}$ ist ein Vektor:

$$\underline{b} = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \, \underline{\alpha}_\nu \; .$$

Einen Ausdruck dieser Form bezeichnet man als Linearkombination: $\underline{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\underline{\alpha}_\nu$ von $\underline{A}$.

m Vektoren $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \dots, \underline{\alpha}_m$ sind linear abhängig, wenn:

$$u_1 \, \underline{\alpha}_1 + u_2 \, \underline{\alpha}_2 + \dots + u_m \, \underline{\alpha}_m = \underline{0}$$

$$\text{für} \quad \underline{u} \neq \underline{0} \; ,$$

d.h., wenn es eine Linearkombination mit u_i, $i = 1, \dots, m$

gibt, die nicht sämtlich Null sind.

Beispiel:
Die drei Vektoren

$$\underline{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sind linear abhängig, denn es ist

$$\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + 2\,\underline{\alpha}_3 = \underline{0} .$$

Sonderfälle:
m Vektoren sind *linear abhängig*, wenn einer der Vektoren $\underline{\alpha}_i$ der Nullvektor ist, oder wenn einer der Vektoren $\underline{\alpha}_i$ ein Vielfaches eines anderen Vektors $\underline{\alpha}_j$ ist.
Die Einheitsvektoren (jeder Dimension)

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind immer *linear unabhängig*.

A1.5 Rang einer Matrix

Wir betrachten eine [n×m]-Matrix $\underline{A}$ mit

Vektoren $\underline{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, m$ und
transponierten Vektoren $\underline{\beta}_j^T$, $j = 1, \ldots, n$.

Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\underline{\alpha}_i$ bezeichnen wir mit ρ_α, die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren $\underline{\beta}_j$ mit ρ_β.
ρ_α ist der *Spaltenrang*, ρ_β der *Zeilenrang* von $\underline{A}$. Es zeigt sich, daß diese beiden Rangzahlen übereinstimmen, so daß

man den *Rang* ρ *einer* $[n \times m]$*-Matrix* durch eine der beiden festlegen kann.
Eine Matrix $\underline{A}$, die nur linear unabhängige Vektoren $\underline{\alpha}_i$ und $\underline{\beta}_j$ hat, ist *regulär*. Hat eine Matrix $\underline{A}$ linear abhängige Vektoren $\underline{\alpha}_i$ oder $\underline{\beta}_j$, so ist sie *singulär*.

A1.6 Determinanten

Determinanten sind nur für quadratische Matrizen definiert. Unter der Determinante einer Matrix $\underline{a}_{n \times n}$ versteht man die Zahl D, die sich nach der folgenden Formel berechnen läßt:

$$D = \det(\underline{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{i\nu} \qquad \text{(A1.1)}$$

für jedes beliebige $i = 1, \ldots, n$.

A_{ij} sind die *Adjunkten* der Elemente a_{ij}: Es sind Unterdeterminanten, die man aus der gegebenen Determinante durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Streichen

Gleichung (A1.1) ist der Entwicklungssatz für Determinanten. Die Berechnung einer Determinante nach (A1.1) ist äußerst aufwendig und sollte für $n > 4$ auf keinen Fall durchgeführt werden.
Die *Determinante zweiter Ordnung* $(n = 2)$ ergibt sich nach der Formel:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \ .$$

⊖ ⊕

Produkte in Richtung der Hauptdiagonalen sind positiv, senkrecht zur Hauptdiagonalen sind sie negativ.
Für eine *Determinante dritter Ordnung* werden die ersten beiden Spalten nochmals hinter die letzte Spalte geschrieben. Die Produktbildung erfolgt wie bei der Determinante zweiter Ordnung:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \hat{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\ominus$ $\oplus$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

$$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} .$$

Beispiele:

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Im folgenden Beispiel wird $a_{i\nu} = a_{31}, a_{32}, a_{33}$ gewählt (vgl. (A1.1)):

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{3+2} \det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3} \det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -1 - 9 = -10$ (Berechnung nach dem Entwicklungssatz).

Der Entwicklungssatz ist jedoch besonders einfach anzuwenden bei Dreiecksmatrizen:
Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(\underline{L}) = L_{11}\ L_{22}\ \ldots\ L_{nn}$$

$L_{ij} = 0$ für $j > i$ (untere Dreicksmatrix)

oder $\det(\underline{U}) = U_{11} \; U_{22} \; \ldots \; U_{nn}$

$$U_{ij} = 0 \quad \text{für } j < i \quad \text{(obere Dreiecksmatrix)} .$$

Die Determinante eines Matrizenproduktes ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen:

$$\det(\underline{A}\;\underline{B}) = \det(\underline{A})\;\det(\underline{B}) .$$

Ist bei einer Matrix die Determinate Null, so bezeichnet man die Matrix als *singulär*. Ist die Determinante ungleich Null, so ist die Matrix *regulär*.

A1.7 Inverse und Halbinverse von Matrizen

Eine quadratische Matrix besitzt nur dann eine inverse Matrix, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.
Man bezeichnet die Inverse von $\underline{A}_{n\times n}$ mit $\underline{A}^{-1}$.
Es gilt:

$$\underline{A}\;\underline{A}^{-1} = \underline{I}$$

$$\underline{A}^{-1}\;\underline{A} = \underline{I} .$$

Für das Rechnen mit Inversen gelten folgende Rechenregeln:

$$(\underline{A}\;\underline{B}\;\ldots\;\underline{H})^{-1} = \underline{H}^{-1}\;\ldots\;\underline{B}^{-1}\;\underline{A}^{-1}$$

$$(\underline{A}^{T})^{-1} = (\underline{A}^{-1})^{T} .$$

Eine $[n\times n]$-Matrix $\underline{A}$ bezeichnet man als *orthogonale Matrix*, wenn gilt:

$$\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{T}$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{A}^{T}\;\underline{A} = \underline{A}\;\underline{A}^{T} = \underline{I} .$$

Beispiele für orthogonale Matrizen sind:

- Drehungsmatrizen (siehe Abschnitt 3.4)
- Permutationsmatrizen (Vertauschungsmatrizen).

Rechteckige Matrizen mit linear unabhängigen Zeilen be-

zeichnet man als *zeilenregulär*, solche mit linear unabhängigen Spalten als *spaltenregulär*.
Für *zeilenreguläre* $[n \times m]$-Matrizen gibt es *Rechtsinverse*, für *spaltenreguläre* $[n \times m]$-Matrizen *Linksinverse* mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\underline{A}_{n \times m}$ zeilenregulär mit $m > n$.
Es gibt Matrizen $\underline{B}_{o[m \times n]}$ (Rechtsinverse) derart, daß

$$\underline{A}\,\underline{B}_o = \underline{I}_n \,.$$

(2) $\underline{A}_{n \times m}$ spaltenregulär mit $n > m$.
Es gibt Matrizen $\underline{B}_{o[m \times n]}$ (Linksinverse) derart, daß

$$\underline{B}_o\,\underline{A} = \underline{I}_m \,.$$

(3) Linksinverse und Rechtsinverse sind nicht eindeutig bestimmt.

Die Vieldeutigkeit der Links- und Rechtsinversen kann durch zusätzliche Bedingungen beseitigt werden. Bezüglich näherer Einzelheiten wird auf einschlägige Lehrbücher der linearen Algebra verwiesen (*Halbinverse* und *Pseudoinverse*). Die Berechnung von *Rechtsinversen* wird im Anhang A2.1.6 gezeigt.

A1.8 Die Hadamard'sche Konditionszahl

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten zur Beurteilung der numerischen Stabilität bei der Berechnung der Inversen einer *quadratischen Matrix*.
Eine der bekanntesten Determinantenabschätzungen ist nach *Hadamard* benannt (vgl. Zurmühl /95/, Seite 212):

$$K_H = \frac{|\det(\underline{A})|}{Z} \,.$$

$|\det(\underline{A})|$ ist der Betrag der Determinante der $[n \times n]$-Matrix $\underline{A}$, Z ist das Volumen des aus den Zeilenvektorbeträgen ge-

bildeten Rechtkantes; man berechnet Z wie folgt:

Zeilenvektoren: $\underline{\beta}_i^T$, $i = 1, \ldots, n$

Zeilenvektorbeträge: $a_i = \sqrt{\underline{\beta}_i \, \underline{\beta}_i^T} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (A_{i\nu})^2}$

Volumen d. Rechtkantes: $Z = a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_n$.

Die Konditionszahl K_H liegt zwischen 0 und 1:

$$0 \le K_H \le 1 \; .$$

(singulär) (optimale Kondition)

Jede orthogonale Matrix und jede Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ungleich Null besitzt eine optimale Kondition.

A1.9 Positiv definite Matrizen

Quadratische Matrizen werden als positiv definit bezeichnet, wenn gilt:

$$\underline{x}^T \, \underline{A} \, \underline{x} \underset{(=)}{>} 0 \quad \text{für alle } \underline{x} \neq \underline{0} \; .$$

Bei Gültigkeit der größer-gleich Relation bezeichnet man $\underline{A}$ als positiv semidefinit.
Analog wird negativ definit erklärt.

Beispiel:

$$[x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_1 \, x_2(\alpha + \beta) + 2 \, x_2^2 \; .$$

Es ist dies eine Parameterdarstellung für Kegelschnitte:
Für $\alpha = \beta = 0$ erhält man z.B. die Ellipse:

$$x_1^2 + 2 \, x_2^2 = \text{const.}$$

Es läßt sich zeigen, daß positiv definiten Matrizen $\underline{A}$ immer konvexe Funktionen $\underline{x}^T \, \underline{A} \, \underline{x} = \text{const.}$ zugeordnet sind, wie im vorliegenden Beispiel die Ellipse.

A2 Spezielle Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und für Eigenwertprobleme

A2.1 Lineare Gleichungssysteme

A2.1.1 Allgemeines

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 + \ldots + A_{1m}\,x_m &= b_1 \\ A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 + \ldots + A_{2m}\,x_m &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ A_{n1}\,x_1 + A_{n2}\,x_2 + \ldots + A_{nm}\,x_m &= b_n \end{aligned}$$

kann mit

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad (A2.1)$$

in Matrizenform dargestellt werden. Gegeben sind $\underline{A}_{n\times m}$ und $\underline{b}_{n\times 1}$, gesucht sind die Vektoren $\underline{x}_{m\times 1}$, die (A2.1) erfüllen.

Es gilt der folgende wichtige Satz:

> Das Gleichungssytem $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A}_{n\times m}$, $\underline{b}_{n\times 1}$ hat genau dann eine Lösung $\underline{x}_{m\times 1}$, wenn die Matrix $\underline{A}$ und die erweiterte $[n\times(m+1)]$-Matrix $[\,\underline{A}\ \underline{b}\,]$ beide den gleichen Rang r haben. Die Lösung ist eindeutig für r = m ($\underline{A}$ quadratisch nichtsingulär). Für r < m hängt die Lösung von m - r Parametern ab - die Lösung ist (m - r)-fach vieldeutig.

Beide Fälle haben in den Matrizenmethoden eine zentrale Bedeutung.

A2.1.2 Der Gauß'sche Algorithmus

Anwendungsbereich: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A}_{n\times n} = [\,A_{ij}\,]$

- Koeffizientenmatrix $\underline{A}$: quadratisch und nichtsingulär,
- insbesondere für Handrechnung geeignet.

Kurzbeschreibung:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}\,x_1 & + & A_{12}\,x_2 & + & \dots & + & A_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ A_{21}\,x_1 & + & A_{22}\,x_2 & + & \dots & + & A_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ A_{n1}\,x_1 & + & A_{n2}\,x_2 & + & \dots & + & A_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array}$$

Durch Zeilentausch wird sichergestellt, daß A_{11} das betragsgrößte Element der ersten Spalte ist.

$A_{11} = 0$: Die Matrix $\underline{A}$ ist singulär, Abbruch - es gibt keine eindeutige Lösung.

$A_{11} \neq 0$: Die erste Zeile wird nacheinander mit Faktoren

$$C_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}} \; ; \quad i = 2, \dots, n$$

multipliziert und von den Zeilen i subtrahiert.

$$\frac{A_{21}}{A_{11}}(A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 + \dots + A_{1n}\,x_n = b_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \; A_{21}\,x_1 + \dfrac{A_{21}\,A_{12}}{A_{11}}\,x_2 + \dots + \dfrac{A_{21}\,A_{1n}}{A_{11}}\,x_n = \dfrac{A_{21}}{A_{11}}\,b_1 \\ \quad\; A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 + \dots + A_{2n}\,x_n = b_2 \end{array}\right) \ominus$$

neue 2. Zeile:

$$(A_{22} - \frac{A_{21}\,A_{12}}{A_{11}})x_2 + \dots + (A_{2n} - \frac{A_{21}\,A_{1n}}{A_{11}})x_n = b_2 - \frac{A_{21}}{A_{11}}b_1 \; .$$

Mit der Vereinbarung

$$A'_{22} = A_{22} - \frac{A_{21}\,A_{12}}{A_{11}}, \; \dots, \; A'_{2n} = A_{2n} - \frac{A_{21}\,A_{1n}}{A_{11}}$$

und

$$b'_2 = b_2 - \frac{A_{21}}{A_{11}}b_1 \quad \text{usw.}$$

ist das Ergebnis der ersten Elimination:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \ldots + A_{1n} x_n &= b_1 \\ A'_{22} x_2 + \ldots + A'_{2n} x_n &= b'_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ A'_{n2} x_2 + \ldots + A'_{nn} x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Die zweite Elimination beginnt in der zweiten Zeile:
Durch Zeilentausch wird sichergestellt, daß A_{22} das betragsgrößte Element der zweiten Spalte ist (mit Ausnahme des Elementes in der ersten Zeile).

$A'_{22} = 0$: Die Matrix $\underline{A}$ ist singulär, Abbruch - es gibt keine eindeutige Lösung.

$A'_{22} \neq 0$: Die zweite Zeile wird nacheinander mit Faktoren

$$C_{i2} = \frac{A'_{i2}}{A'_{22}} \;; \quad i = 3, \ldots, n$$

multipliziert und von den Zeilen i subtrahiert.

Ergebnis der zweiten Elimination:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 + \ldots + A_{1n} x_n &= b_1 \\ A'_{22} x_2 + A'_{23} x_3 + \ldots + A'_{2n} x_n &= b'_2 \\ A''_{33} x_3 + \ldots + A''_{3n} x_n &= b''_3 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ A''_{n3} x_3 + \ldots + A''_{nn} x_n &= b''_n \end{aligned}$$

Die Elimination wird fortgesetzt, bis $\underline{A}$ in eine obere Dreiecksmatrix transformiert ist.

Wir bezeichnen die Elemente dieser oberen Dreiecksmatrix mit U_{ij} und die rechte Seite mit d_i:

$$\begin{aligned}
U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + U_{13}x_3 + \ldots + U_{1n}x_n &= d_1\\
U_{22}x_2 + U_{23}x_3 + \ldots + U_{2n}x_n &= d_2\\
U_{33}x_3 + \ldots + U_{3n}x_n &= d_3\\
&\vdots\\
U_{n-1,n-1}x_{n-1} + U_{n-1,n}x_n &= d_{n-1}\\
U_{nn}x_n &= d_n
\end{aligned}$$

Die Lösung $\underline{x}$ berechnet man durch "Rückwärtseinsetzen":

$$\begin{aligned}
x_n &= d_n/U_{nn}\,,\\
x_{n-1} &= (d_{n-1} - U_{n-1,n}x_n)/U_{n-1,n-1}\,,\\
&\vdots\\
x_1 &= (d_1 - \sum_{\nu=2}^{n} U_{1\nu}x_\nu)/U_{11}\,.
\end{aligned}$$

Die Determinante erhält man aus:

$$\det(\underline{A}) = U_{11}\,U_{22}\ldots U_{nn}\,.$$

Anmerkung: Bei mehreren rechten Seiten wird die Elimination für alle rechten Seiten gleichzeitig ausgeführt.

Beispiel:

Das Gleichungssystem $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ wird im folgenden mit dem Gauß'schen Algorithmus berechnet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -10\\ 10\\ -10\\ 10 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Die Eliminationschritte (ES) werden zusammengefaßt dargestellt:

							c_{ij}
1. ES:	(1)	8	2	0	2	-10	
	(2)	2	8	2	0	10	-1/4
	(3)	0	2	8	2	-10	0
	(4)	2	0	2	8	10	-1/4 (c_{i1})
2. ES:	(2')	0	7,5	2	-0,5	12,5	
	(3')	0	2	8	2	-10	-8/30
	(4')	0	-0,5	2	7,5	12,5	2/30 (c_{i2})
3. ES:	(3")		0	7,4667	2,1333	-13,3333	
	(4")		0	2,1333	7,4667	13,3333	-2/7 (c_{i3})
4. ES:	(4)			0	6,8571	17,1426	

Ergebnis der Elimination:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7,5 & 2 & -0,5 \\ 0 & 0 & 7,4667 & 2,1333 \\ 0 & 0 & 0 & 6,8571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 12,5 \\ -13,3333 \\ 17,1426 \end{bmatrix}$$

Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 \\ 2,5 \\ -2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$\det(\underline{A}) = 8 \cdot 7,5 \cdot 7,4667 \cdot 6,8571 \approx 3072 \ .$$

A2.1.3 Dreieckszerlegung nach Gauß mit Spaltenpivotsuche

Anwendungsbereich: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A}_{n \times n} = [A_{ij}]$

- Koeffizientenmatrix $\underline{A}$: quadratisch und nichtsingulär,
- für Programmierung besonders gut geeignet.

Kurzbeschreibung:

Erster Rechenschritt: Dreieckszerlegung von $\underline{A}$ mit Zeilenvertauschung. Durch die Zeilenvertauschung wird $\underline{A}$ zu $\underline{\tilde{A}}$

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{V}_n\,\underline{A} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{L}\,\underline{U}\,.$$

$\underline{L}$: *untere Dreiecksmatrix*
$\underline{U}$: *obere Dreiecksmatrix*
$\underline{V}_n$: *Permutationsmatrix;* entsteht durch Spaltenvertauschung aus $\underline{I}_n$.

Beschreibung der Dreieckszerlegung:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^n_{11} & \tilde{A}^n_{12} & \tilde{A}^n_{13} & \dots & \tilde{A}^n_{1n} \\ \tilde{A}^n_{21} & \tilde{A}^n_{22} & \tilde{A}^n_{23} & \dots & \tilde{A}^n_{2n} \\ \tilde{A}^n_{31} & \tilde{A}^n_{32} & \tilde{A}^n_{33} & \dots & \tilde{A}^n_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}^n_{n1} & \tilde{A}^n_{n2} & \tilde{A}^n_{n3} & \dots & \tilde{A}^n_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ L_{21} & 1 & & & \underline{0} \\ L_{31} & L_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ & & U_{33} & \dots & U_{3n} \\ & \underline{0} & & & \vdots \\ & & & & U_{nn} \end{bmatrix}$$

Bei der Gauß'schen Dreieckszerlegung mit Spaltenpivotsuche wird die Ausgangsmatrix $\underline{A}^0$ in die untere Dreiecksmatrix $\underline{L}$ und die obere Dreiecksmatrix $\underline{U}$ überführt. $\underline{A}^k$ ist die Zerlegung von $\underline{A}$ im k-ten Schritt.

1. Schritt:

- Pivotsuche:
  Pivotregel $A^1_{11} = \max\{|A^0_{i1}|\} \quad i = 1, 2, \dots, n$
  Ist $A^1_{11} = 0$, so muß die Zerlegung beendet werden, da $\underline{A}$ singulär ist. Durchführung eines eventuell notwendigen Zeilentausches.
- Berechnung der 1. Spalte von $\underline{L}$ aus der ersten Spalte von $\underline{A}^0$:

$$\text{für} \quad i = 2, \dots, n \quad \text{ist} \quad L_{i1} = A^0_{i1}/A^1_{11}\,.$$

- Veränderung der Restmatrix von $\underline{A}^0$:

  für $i = 2, \ldots, n$ und $j = 2, \ldots, n$

  ist $A^1_{ij} = A^0_{ij} - L_{i1} A^0_{1j}$.

2. Schritt:

- Pivotsuche:

  Pivotregel $A^2_{22} = \max \{|A^1_{i2}|\}$ $i = 2, 3, \ldots, n$

  Ist $A^2_{22} = 0$, so muß die Zerlegung beendet werden, da $\underline{A}$ singulär ist. Durchführung eines eventuell notwendigen Zeilentausches.

- Berechnung der 2. Spalte von $\underline{L}$ aus der zweiten Spalte von $\underline{A}^1$:

  für $i = 3, \ldots, n$ ist $L_{i2} = A^1_{i2}/A^2_{22}$.

- Veränderung der Restmatrix von $\underline{A}^1$:

  für $i = 3, \ldots, n$ und $j = 3, \ldots, n$

  ist $A^2_{ij} = A^1_{ij} - L_{i2} A^1_{2j}$.

Durch Fortführung erhält man im *k-ten Schritt:*

- Pivotsuche:

  Pivotregel $A^k_{kk} = \max \{|A^{k-1}_{ik}|\}$ $i = k, \ldots, n$

  Ist $A^k_{kk} = 0$, so muß die Zerlegung beendet werden, da $\underline{A}$ singulär ist. Durchführung eines eventuell notwendigen Zeilentausches.

- Berechnung der k-ten Spalte von $\underline{L}$ aus der k-ten Spalte von $\underline{A}^{k-1}$:

  für $i = k+1, \ldots, n$ ist $L_{ik} = A^{k-1}_{ik}/A^k_{kk}$. (A2.2)

- Veränderung der Restmatrix von $\underline{A}^{k-1}$:

  für $i = k+1, \ldots, n$ und $j = k+1, \ldots, n$

  ist $A^k_{ij} = A^{k-1}_{ij} - L_{ik} A^{k-1}_{kj}$. (A2.3)

Am Ende der Zerlegung ist das obere Dreieck von $\underline{A}^n$ einschließlich der Hauptdiagonalen identisch mit der oberen Dreiecksmatrix $\underline{U}$. Unterhalb der Hauptdiagonalen steht $\underline{L}$.

Die Hauptdiagonale von $\underline{L}$ wird, da sie nur Einsen enthält, nicht aufgeschrieben.

Anmerkungen:
Bei unsymmetrischen Koeffizientenmatrizen muß in jedem Zerlegungsschritt eine Pivotsuche durchgeführt werden.
Es gibt Varianten des Gauß'schen Algorithmus, bei denen neben der Spaltenpivotsuche auch eine Zeilenpivotsuche (vollständige Pivotsuche) oder nur eine Zeilenpivotsuche durchgeführt wird.
Beim verketteten Gauß'schen Algorithmus mit Spaltenpivotsuche erzeugt man in jedem Zerlegungsschritt eine Spalte von $\underline{L}$ und eine Zeile von $\underline{U}$. Im Vergleich mit dem hier vorgestellten Gauß'schen Algorithmus wird die gleiche Anzahl von Rechenoperationen benötigt; für die Handrechnung empfiehlt sich der verkettete Algorithmus wegen der geringeren Schreibarbeit. Bei Koeffizientenmatrizen mit nur wenigen Nichtnullelementen ist das hier vorgestellte Verfahren für die Programmierung besser geeignet.
Die Zeilenvertauschungen werden in einem Vertauschungsvektor (Zeilennummern als Elemente) festgehalten. Mit dem Vertauschungsvektor bildet man die Permutationsmatrix $\underline{V}_n$ durch Spaltentausch aus der Einheitsmatrix $\underline{I}_n$.

Beispiel zur Dreieckszerlegung:

$$\underline{A} \equiv \underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{(Vertauschungsvektor)}$$

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen 1. und 2. Zeile:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zerlegung der ersten Spalte:

$$L_{21} = 0 \;, \quad L_{31} = 0{,}5 \;, \quad L_{41} = -0{,}5$$

Veränderung der Restmatrix von $\underline{A}^0$:

$$\begin{array}{lll} A^1_{22} = 1 & A^1_{23} = 1 & A^1_{24} = -1 \\ A^1_{32} = -0{,}5 & A^1_{33} = 0 & A^1_{34} = 0{,}5 \\ A^1_{42} = 2{,}5 & A^1_{43} = 1 & A^1_{44} = 2{,}5 \end{array}$$

Der erste Zerlegungsschritt ergibt damit:

$$\underline{A}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 2{,}5 & 1 & 2{,}5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen 2. und 4. Zeile von $\underline{A}^1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & 2{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zerlegung der zweiten Spalte:

$$L_{32} = -0{,}2 \;, \quad L_{42} = 0{,}4$$

Veränderung der Restmatrix von $\underline{A}^1$:

$$\begin{array}{ll} A^2_{33} = 0{,}2 & A^2_{34} = 1 \\ A^2_{43} = 0{,}6 & A^2_{44} = -2 \end{array}$$

Der zweite Zerlegungsschritt ergibt damit:

$$\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & 2{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}2 & 0{,}2 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen 3. und 4. Zeile von $\underline{A}^2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -0,5 & 2,5 & 1 & 2,5 \\ \hline 0 & 0,4 & 0,6 & -2 \\ 0,5 & -0,2 & 0,2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Zerlegung der dritten Spalte:

$$L_{43} = 0,333$$

Veränderung des oberen Dreiecks von $\underline{A}^2$:

$$A^3_{44} = 1,667$$

Damit sind $\underline{L}$, $\underline{U}$ und $\underline{V}_4$ bestimmt:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \underline{0} \\ -0,5 & 1 & & \\ 0 & 0,4 & 1 & \\ 0,5 & -0,2 & 0,333 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ & 2,5 & 1 & 2,5 \\ & & 0,6 & -2 \\ \underline{0} & & & 1,667 \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\underline{L}\ \underline{U} = \underline{\tilde{A}} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \underline{V}_4\ \underline{A}$$

Zweiter Rechenschritt: Vorwärts-Rückwärtseinsetzen

Nach der Dreieckszerlegung wird die Lösung von

$$\underline{\tilde{A}}\ \underline{x} = \underline{\tilde{b}}$$

berechnet. $\underline{\tilde{A}}$ ist die aus $\underline{A}$ durch Zeilentausch entstandene Matrix; entsprechende Vertauschungen ergeben $\underline{\tilde{b}}$.

Es gilt:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{L}\ \underline{U}$$

Gesucht wird $\underline{x}$:

$$\underline{L}\ \underline{U}\ \underline{x} = \underline{\tilde{b}}$$

Substitution:

$$\underline{U}\ \underline{x} = \underline{y}$$

- Vorwärtseinsetzen $\underline{L}\ \underline{y} = \underline{\tilde{b}}$:
  Beginnend bei y_1 ergibt sich

$$y_i = \tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\ y_j\ . \qquad \text{(A2.4)}$$

- Rückwärtseinsetzen $\underline{U}\ \underline{x} = \underline{y}$:
  Beginnend bei x_n ergibt sich

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}\ x_j)/U_{ii}\ . \qquad \text{(A2.5)}$$

$\underline{x}$ ist die gesuchte Lösung.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Die Dreieckszerlegung und der zugehörige Zeilenvertauschungsvektor sind bekannt (s.o.). Man erhält mit $\underline{\tilde{b}}$ entsprechend dem Vertauschungsvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \underline{0} \\ -0{,}5 & 1 & & \\ 0 & 0{,}4 & 1 & \\ 0{,}5 & -0{,}2 & 0{,}333 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$y_1 = 2\ , \quad y_2 = -1\ , \quad y_3 = 1{,}4 \quad \text{und} \quad y_4 = -2{,}667\ .$$

Für das Rückwärtseinsetzen ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ & 2{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ & & 0{,}6 & -2 \\ \underline{0} & & & 1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1{,}4 \\ -2{,}667 \end{bmatrix}$$

und $x_4 = -1{,}6 \;, \quad x_3 = -3 \;, \quad x_2 = 2{,}4 \;, \quad x_1 = 0{,}6 \;.$

Berechnung der Determinante:

Die Determinante von $\underline{A}$ erhält man als Produkt der Diagonalelemente von $\underline{U}$ (wegen $L_{ii} = 1$):

$$\det(\underline{A}) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii} \;.$$

Für das obige Beispiel:

$$\det(\underline{A}) = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}667 = 5{,}0$$

A2.1.4 Das Cholesky-Verfahren

Anwendungsbereich: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \;, \quad \underline{A} = [A_{ij}]$ und $A_{ij} = A_{ji}$

- symmetrische, positiv definite Matrizen $\underline{A}$,
- besonders für die Programmierung geeignet.

Kurzbeschreibung:

Erster Rechenschritt: Dreieckszerlegung von $\underline{A}$

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{L}^T$$

Wegen der Symmetrie von $\underline{A}$ ist die obere Dreiecksmatrix die Transponierte der unteren.

Ableitung von Rekursionsformeln zur Berechnung von L_{ij} wie bei der Gauß'schen Dreieckszerlegung (A2.1.3):

$$L_{ii} = \left(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2\right)^{1/2} \qquad \text{(A2.6)}$$

$$L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}}{L_{jj}} \quad \text{für } i > j \qquad \text{(A2.7)}$$

Anmerkung:
Eine Pivotsuche ist nicht sinnvoll. Aus Symmetriegründen müßte Spalten- und Zeilentausch erfolgen, dies führt jedoch bei positiv definiten Matrizen zu keiner wesentlichen Verbesserung der Lösung.

Zweiter Rechenschritt:
Lösung des Gleichungssystemes

$$\underline{L}\,\underline{L}^T\,\underline{x} = \underline{b}$$

- Vorwärtseinsetzen $\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b}$:
  Beginnend bei y_1 ergibt sich

$$y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\, y_j)/L_{ii} \;.$$

- Rückwärtseinsetzen $\underline{L}^T\,\underline{x} = \underline{y}$:
  Beginnend bei x_n ergibt sich

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} L_{ji}\, x_j)/L_{ii} \;.$$

Beispiel:
Es wird die Dreieckszerlegung der folgenden Matrix durchgeführt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ & 6 & 3 & 2 \\ & & 2 & 1 \\ & \text{sym.} & & 10 \end{bmatrix}$$

Die Zerlegung ergibt spaltenweise:

$L_{11} = 1{,}732$

$L_{21} = 0$ $\quad L_{22} = 2{,}449$

$L_{31} = -0{,}577$ $\quad L_{32} = 1{,}225$ $\quad L_{33} =$ ~~0,439~~ 0,408

$L_{41} = 0{,}577$ $\quad L_{42} = 0{,}816$ $\quad L_{43} =$ ~~0,766~~ 0,817 $\quad L_{44} =$ ~~2,9~~ 2,887

Zusammengefaßt als Matrix ist:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1,732 & & & \underline{0} \\ 0 & 2,449 & & \\ -0,577 & 1,225 & 0,439 & \\ 0,577 & 0,816 & 0,766 & 2,9 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Determinante:

$$\det(\underline{A}) = L_{11}^2 \; L_{22}^2 \; L_{33}^2 \; \dots \; L_{nn}^2 \; .$$

Dies folgt aus dem Entwicklungssatz für Determinanten: Der Wert der Determinante würde sich nicht ändern, wenn man eine der beiden Dreiecksmatrizen so transformieren würde, daß die Diagonalelemente zu 1 würden. Diese Transformation würde die Diagonalelemente der anderen Dreiecksmatrix quadrieren.

A2.1.5 Inversion einer symmetrischen, positiv definiten Matrix

Anwendungsbereich: $\underline{A}_{n \times n}$, symmetrisch, positiv definit

- Sonderfälle, bei voll besetzter [n×n]-Matrix und mehreren rechten Seiten (∿ n).

Erster Rechenschritt:
Berechnung von $\underline{L}$ nach Cholesky (A2.1.4).

Zweiter Rechenschritt:
Berechnung der Elemente von $\underline{L}^{-1} \equiv \underline{\ell} = [\ell_{ij}]$ nach:

$$\ell_{ii} = 1/L_{ii}$$

$$\ell_{ij} = - \frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} L_{ik} \, \ell_{kj}}{L_{ii}} \qquad i > j$$

$$\ell_{ij} = 0 \qquad i < j \; .$$

Dritter Rechenschritt:

Matrizenprodukt $\underline{A}^{-1} = (\underline{L}^{-1})^T \underline{L}^{-1}$

Anmerkung:

Matrizeninversion sollte vermieden werden, wenn nur ein Gleichungssystem mit einigen wenigen rechten Seiten zu lösen ist.

Die Inversen von Bandmatrizen sind im allgemeinen voll besetzt, die Inversion fordert nahezu soviele Rechenoperationen wie die Lösung für n rechte Seiten.

A2.1.6 Lösung eines speziellen unterbestimmten Gleichungssystemes

Anwendungsbereich: Gleichungssysteme der Form $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A}_{n\times m}$ mit $m > n$ und Rang $(\underline{A}) = n$.

Die Norm der Zeilenvektoren von $\underline{A}$ ist von gleicher Größenordnung. Die Anwendung wird auf Gleichungssysteme beschränkt, wie sie beim Kraftgrößenverfahren auftreten. Diese Gleichungssysteme besitzen keine schwach linear abhängigen Zeilen.

Allgemeine Sätze über die Lösung:

(1) Ein homogenes Gleichungssytem

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{0} \quad \text{mit} \quad \underline{A}_{n\times m} \quad m > n = r \text{ (Rang)} \qquad \text{(A2.8)}$$

besitzt genau $\rho = m - n$ linear unabhängige Lösungen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_\rho$. Diese Vektoren bilden ein Fundamentalsystem, aus dem sich die allgemeine Lösung von (A2.8) mit ρ freien Variablen X_i, $i = 1, \ldots, \rho$ aufbaut:

$$\underline{x}^h = \underline{x}_1 X_1 + \underline{x}_2 X_2 + \ldots + \underline{x}_\rho X_\rho \ . \qquad \text{(A2.9)}$$

(2) Das inhomogene Gleichungssystem

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b} \quad \text{mit } \underline{A}_{n\times m} \quad m > n = r \text{ (Rang)} \quad \text{und } \underline{b} \neq \underline{0} \qquad \text{(A2.10)}$$

besitzt Lösungen $\underline{x}^o$, die jedoch nicht eindeutig sind.

(3) Die Lösung von (A2.8) ist die Summe aus einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems (A2.10) und des homogenen Systems (A2.9).

$$\underline{x} = \underline{x}^o + \underline{x}^h = \underline{x}^o + \underline{x}_1 X_1 + \ldots + \underline{x}_\rho X_\rho \,.$$

(4) Die allgemeine Lösung von (A2.8) läßt sich wie folgt darstellen:

$$\underline{x} = \underline{B}_o \underline{b} + \underline{B}_x \underline{X}$$

mit

$$\underline{A}\,\underline{B}_o = \underline{I}_n, \quad (\underline{B}_{o[m\times n]}\text{: Rechtsinverse; } \underline{x}^o \equiv \underline{B}_o \underline{b}) \qquad (A2.11)$$

$$\underline{A}\,\underline{B}_x = \underline{0}, \quad (\underline{B}_{x[m\times\rho]}\text{: Kern von } \underline{A}\text{; } \underline{x}^h \equiv \underline{B}_x \underline{X}) \qquad (A2.12)$$

und beliebigem $\underline{X}_{\rho\times 1}$.

Allgemeine Lösung mit dem Gauß'schen Algorithmus

Die Berechnung verläuft nach dem in Abschnitt A2.1.3 beschriebenen Gauß'schen Algorithmus mit modifizierter Pivotregel. Ausgangsmatrix ist eine durch Nullzeilen ergänzte, quadratische Matrix. Die Nullzeilen werden im Verlauf der Dreieckszerlegung durch Einheitszeilen ($\hat{\underline{I}}$) ersetzt:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix}$$

Die Dreieckszerlegung erfolgt nach (A2.2) und (A2.3). Falls in einer Spalte k kein Pivotelement $A^k_{kk} > \varepsilon$ (Fehlerschranke) gefunden wird, wählt man die k-te Variable $x^o_k = 0$. Diese Zeile ersetzt die erste Nullzeile von $\underline{A}^o$ in Form des k-ten Einheitszeilenvektors:

$$\underline{e}_k = \overset{\begin{matrix}1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & m\end{matrix}}{[\begin{matrix}0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\end{matrix}]} \,.$$

Damit kann die Dreieckszerlegung fortgeführt werden. Da die Zeilen von $\underline{A}$ wegen des vorausgesetzten vollen Zeilenranges linear unabhängig sind, ergeben sich *im Verlauf der Drei-*

eckszerlegung genau ρ *Pivotelemente zu Null* ($<\varepsilon$) und damit genau ρ Einheitsvektoren. Wir zeigen dies an einem

Beispiel:

Gegeben ist eine [5×8]-Matrix $\underline{A}$; wir bilden die erweiterte Matrix:

$$\hat{\underline{A}}^o = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hdashline & & & & \underline{0} & & & \end{array}\right]$$

Wie bei dem in A2.1.3 beschriebenen Gauß'schen Algorithmus wird das Ergebnis der Dreieckszerlegung in kompakter Form angegeben: Die Matrizen $\underline{L}$ und $\underline{U}$ werden in einer [8×8]-Matrix zusammengefaßt; die Diagonale $L_{ii} = 1$ wird weggelassen.

Die Spalten und Zeilen von $\underline{L}$ und $\underline{U}$ ersetzen schrittweise die Spalten und Zeilen von $\hat{\underline{A}}^o$. Die geänderten Matrizen werden mit $\hat{\underline{A}}^k$ bezeichnet ($k = 1, \ldots, 8$); der Zeiger k kennzeichnet den Zerlegungsschritt. Der Vertauschungsvektor wird neben den Matrizen $\hat{\underline{A}}^k$ angegeben.

1.Schritt:

Die Pivotregel führt zu keinem Zeilentausch. Die Zerlegung der ersten Spalte und die Veränderung der Restmatrix von $\hat{\underline{A}}^o$ ergeben:

$$\hat{\underline{A}}^1 = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hdashline & & & & \underline{0} & & & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hdashline 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right] \quad \text{(Vertauschungsvektor)}$$

2. Schritt:

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen der 2. und 3. Zeile von $\hat{\underline{A}}^1$:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hdashline \multicolumn{8}{c}{\underline{0}} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ \hdashline 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right]$$

Die Zerlegung der zweiten Spalte und die Veränderung der Restmatrix von $\hat{\underline{A}}^1$ ergeben:

$$\hat{\underline{A}}^2 = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hdashline \multicolumn{8}{c}{\underline{0}} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ \hdashline 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right]$$

3.Schritt:

Die Pivotregel ergibt, daß es in der dritten Spalte kein von Null verschiedenes Pivotelement gibt. Die 6. Zeile von $\hat{\underline{A}}^2$ wird als 3. Zeile der [8×8]-Einheitsmatrix angenommen.

$$\hat{\underline{A}}^3 = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ \hdashline \multicolumn{8}{c}{\underline{0}} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right]$$

Die 3. und die 6. Zeile von $\underline{\hat{A}}^2$ werden vertauscht. Die Zerlegung ergibt keine Veränderung der Restmatrix und der 3. Spalte von $\underline{L}$.

4.Schritt:

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen der 4. und 6. Zeile von $\underline{\hat{A}}^3$. Die Zerlegung der 4. Spalte und die Veränderung der Restmatrix von $\underline{\hat{A}}^3$ ergeben:

$$\underline{\hat{A}}^4 = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}444 & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\ \hline & & & & \underline{0} & & & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right]$$

5.Schritt:

Die Pivotregel führt zu einem Zeilentausch zwischen der 5. und 6. Zeile von $\underline{\hat{A}}^4$. Die Zerlegung ergibt keine Veränderungen:

$$\underline{\hat{A}}^5 = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}444 & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline & & & & \underline{0} & & & \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{array}\right]$$

6., 7. und 8. Schritt:

Die Pivotregel ergibt, daß es in der 6. Spalte kein von Null verschiedenes Pivotelement gibt. Die 7. Zeile von $\underline{\hat{A}}^5$ wird als 6. Zeile der [8×8]-Einheitsmatrix angenommen. Die 6. und die 7. Zeile von $\underline{\hat{A}}^5$ werden vertauscht. Die Zerlegung ergibt keine Veränderung.

Die Pivotregel ergibt bei der 7. Spalte keinen Zeilentausch. Die Zerlegung ergibt keine Veränderung.
Die 8. Zeile wird als 8. Zeile der [8×8]-Einheitsmatrix angenommen. Zusammengefaßt ergibt sich damit am Ende der Zerlegung:

$$\underline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}444 & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Damit sind $\underline{L}$, $\underline{U}$, $\underline{V}$ und $\underline{\hat{I}}$ bestimmt:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & \underline{0} & & \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}444 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ & & & & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\ & & & \underline{0} & & 1 & & \\ & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die weitere Berechnung ist das Ausgangsgleichungssytem

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

durch die Festlegung der Einheitszeilen bei der modifizierten Pivotsuche erweitert worden:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{X} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.13)}$$

Gleichung (A2.11) wird erfüllt, wenn man in (A2.13)

$$\underline{X} = \underline{0}_{\rho \times n} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \underline{I}_n$$

setzt:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.14)}$$

Um Gleichung (A2.12) zu erfüllen, setzt man in (A2.13)

$$\underline{b} = \underline{0}_{n \times \rho} \quad \text{und} \quad \underline{X} = \underline{I}_\rho \ .$$

Damit ist:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{B}_x = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.15)}$$

Damit und mit den Dreiecksmatrizen $\underline{L}$ und $\underline{U}$ werden die Rechtsinverse von $\hat{\underline{A}}$ und die Lösungsvektoren der homogenen Gleichung $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{0}$ berechnet.
Wegen der Zeilenvertauschungen gilt:

$$\hat{\underline{A}} = \underline{L}\ \underline{U} \ . \qquad \text{(A2.16)}$$

$\hat{\underline{A}}_{m \times m}$ ergibt sich aus $\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix}$ durch die Zeilenvertauschungen, respektive durch Einfügen von Einheitszeilen. Für die Zeilenvertauschung bilden wir aus dem Vertauschungsvektor die *Permutationsmatrix* $\underline{V}_m$. Die Permutationsmatrix entsteht aus der Einheitsmatrix durch Zeilen- oder Spaltentausch (Anhang A1) und ist eine *orthogonale Matrix:*

$$\underline{V}^T\ \underline{V} = \underline{I} \quad \text{oder} \quad \underline{V}^T = \underline{V}^{-1} \ .$$

Damit ist:

$$\hat{\underline{A}} = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.17)}$$

Die Berechnung der Inversen von $\hat{\underline{A}}$ erfolgt durch *Vorwärts-Rückwärtseinsetzen* unter Berücksichtigung der Vereinfachungen, die sich durch die Einheitszeilen ergeben. Man erhält mit $\hat{\underline{A}}^{-1} = \underline{U}^{-1}\,\underline{L}^{-1}$:

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\hat{\underline{A}}^{-1} = \underline{I}_m \,.$$

Mit (A2.17) ist dann

$$\hat{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hline \hat{\underline{I}} \end{bmatrix}^{-1} \underline{V} \,.$$

Multiplikation mit $\underline{V}^T$ von rechts ergibt (vgl. (A2.14) und (A2.15)):

$$\hat{\underline{A}}^{-1}\,\underline{V}^T = \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hline \hat{\underline{I}} \end{bmatrix}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \underline{B}_o & \underline{B}_x \end{bmatrix} .$$

Der Rechengang ist in Bild A2.1 symbolisch dargestellt.

Es gibt eine Reihe von Varianten zur Lösung desselben Problems, so z.B. das Gauß-Jordan Verfahren /66/ oder eine skalierte Elimination (Spaltenskalierung, Robinson /71/).

Wir beschränken uns auf das hier beschriebene Verfahren, weil es numerisch stabil und einfach programmierbar ist.

Die Inverse von $\hat{\underline{A}}$ erhält man durch wiederholtes Vorwärts-Rückwärtseinsetzen.

(a) *Rechte Seite zur Bestimmung von* $\underline{B}_x$:

Mit (A2.16) und (A2.17) ist:

$$\underline{L}\,\underline{U} = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \hline \hat{\underline{I}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.18)}$$

Für $\underline{B}_x$ gilt nach (A2.15):

$$\underline{A}\,\underline{B}_x = \underline{0} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{I}}\,\underline{B}_x = \underline{I} \,.$$

Multipliziert man Gleichung (A2.18) von rechts mit $\underline{B}_x$, so erhält man:

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{B}_x = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline \underline{I} \end{bmatrix} \equiv \hat{\underline{I}}^T_{m\times r} \,.$$

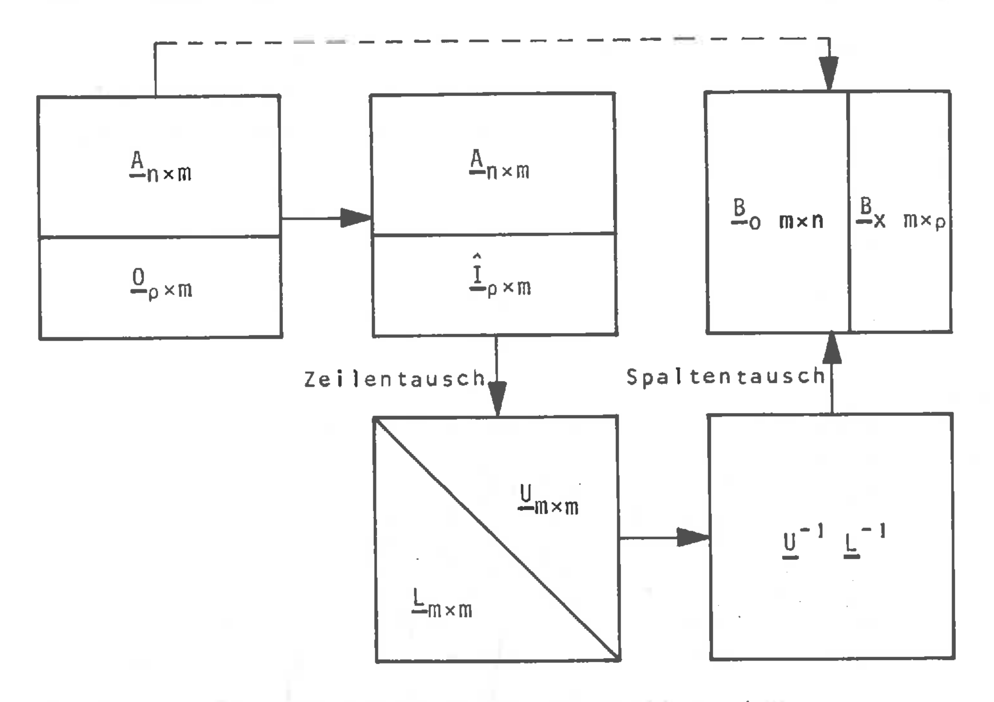


Bild A2.1 Symbolische Darstellung der Berechnung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$

Wegen des speziellen Aufbaus von $\underline{L}$ und $\hat{\underline{I}}$ ist:

$$\underline{L}^{-1}\ \hat{\underline{I}}^T = \hat{\underline{I}}^T \quad \text{und} \quad \underline{U}\ \underline{B}_x = \hat{\underline{I}}^T \ . \tag{A2.19}$$

(b) *Rechte Seite zur Bestimmung von* $\underline{B}_o$:
Für $\underline{B}_o$ gilt nach (A2.14):

$$\underline{A}\ \underline{B}_o = \underline{I} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{I}}\ \underline{B}_o = \underline{0} \ .$$

Multipliziert man (A2.18) von rechts mit $\underline{B}_o$, so erhält man:

$$\underline{L}\ \underline{U}\ \underline{B}_o = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \equiv \tilde{\underline{I}}_{m\times n} \ . \tag{A2.20}$$

(c) *Rechte Seite zur Bestimmung von* $\underline{B}_o\ \underline{b}$:
Wenn ausschließlich die Unbekannten $\underline{x}$ berechnet werden sollen und nur wenige rechte Seiten $\underline{b}$ vorhanden sind,

ist es vorteilhaft, nicht $\underline{B}_o$ sondern $\underline{B}_o\,\underline{b}$ zu bestimmen. Gleichung (A2.20) mit $\underline{b}$ von rechts multipliziert ergibt:

$$\underline{L}\;\underline{U}\;\underline{B}_o\;\underline{b} = \underline{V}^T \left[\begin{array}{c} \underline{b} \\ \hline \underline{0} \end{array}\right]$$

Für die oben zerlegte Matrix wird die Berechnung von $\underline{B}_x$ und $\underline{B}_o$ gezeigt.

Mit der oberen Dreiecksmatrix $\underline{U}$ und der Matrix der Einheitszeilen aus dem obigen Beispiel wird $\underline{B}_x$ nach Gleichung (A2.19) berechnet:

$$\underline{U}\;\underline{B}_x = \underline{\hat{I}}^T$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\
 & & & & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\
 & & & \underline{0} & & 1 & & \\
 & & & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right] \underline{B}_x = \left[\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & & \\
 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 \\
 & 1 & \\
\underline{0} & & 0 \\
 & & 1
\end{array}\right]$$

Durch dreimaliges Rückwärtseinsetzen erhält man $\underline{B}_x$:

$$\underline{B}_x = \left[\begin{array}{ccc}
-1 & -2 & 19{,}285 \\
-1 & -1 & 9{,}643 \\
1 & & \\
 & 0 & -1{,}286 \\
 & 1 & -5{,}786 \\
 & 1 & \\
 & & -0{,}500 \\
 & \underline{0} & 1
\end{array}\right]$$

Wegen der speziellen Struktur von $\underline{\hat{I}}^T$ beginnt das Rückwärtseinsetzen erst in der eingefügten Einheitszeile.

Nach Gleichung (A2.20) wird $\underline{B}_o$ durch 5-faches Vorwärts-

Rückwärtseinsetzen berechnet:

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{B}_0 = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

– *Vorwärtseinsetzen:*

mit $\underline{U}\,\underline{B}_0 = \underline{y}$ ist $\underline{L}\,\underline{y} = \underline{V}^T \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & \underline{0} & & \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}444 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & & 1 & \underline{0} & \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & & \underline{\underline{0}} & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & & \\ 1 & 1 & -0{,}25 & & \\ -0{,}444 & -0{,}444 & 0{,}111 & 1 & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

– *Rückwärtseinsetzen:*

mit $\underline{y}$ ist $\underline{U}\,\underline{B}_0 = \underline{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 4 & 3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2{,}25 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ & & & & -0{,}778 & 0{,}778 & 3 & -3 \\ & & \underline{0} & & & 1 & & \\ & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \underline{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 1 & 1 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ -0{,}444 & -0{,}444 & 0{,}111 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & \underline{0} & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Durch fünfmaliges Rückwärtseinsetzen erhält man $\underline{B}_o$:

$$\underline{B}_o = \begin{bmatrix} -1{,}571 & -2{,}571 & 1{,}143 & 4{,}286 & -6{,}428 \\ -1{,}286 & -1{,}286 & 0{,}571 & 2{,}143 & -3{,}214 \\ & & & & \\ 0{,}571 & 0{,}571 & -0{,}143 & -0{,}286 & 0{,}429 \\ 0{,}571 & 0{,}571 & -0{,}143 & -1{,}286 & 1{,}929 \\ & & & & \\ & & \underline{0} & & 0{,}500 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Auch bei der Berechnung von $\underline{B}_o$ beginnt das Rückwärtseinsetzen erst in der ersten in $\underline{y}$ belegten Zeile.

Im folgenden ist ein Programm in FORTRAN IV zur Bestimmung von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ nach der Gauß'schen Dreieckszerlegung mit modifizierter Pivotsuche abgedruckt /85/. Das Programm berechnet $\underline{B}_o$ und *kompakte* $\underline{B}_x$ (siehe Kapitel 14.1).

Für das Programm muß die Matrix $\underline{A}_{n \times m}$ in einer speziellen Form gespeichert werden.

Die Zeilen von $\underline{A}$ werden beginnend mit dem ersten Nichtnullelement und mit einer konstanten Zeilenlänge m_{max} in eine Matrix $\overline{\underline{A}}_{n \times m_{max}}$ übertragen. Die Zeilenlänge m_i wird durch die Differenz der Spaltennummern des letzten und des ersten Nichtnullelementes bestimmt. Die maximale Zeilenlänge für $\overline{\underline{A}}$ ist:

$$m_{max} = \max \{m_i\} \; .$$

Ein Vektor $\underline{z}_{n \times 1}$ enthält die Spaltennummer des ersten Nichtnullelementes jeder Zeile. Im folgenden werden $\overline{\underline{A}}$, m_{max} und $\underline{z}$ an einer [7×12]-Matrix $\underline{A}$ gezeigt:

$\underline{A}$ =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	x	x		x	← m_1 = 4								1
			x		x	← m_2 = 3							2
	x	x			x	← m_3 = 5							3
	m_4 = 6 →					x			x	x	x		4
	m_5 = 4 →			x		x	x						5
					m_6 = 3 →			x		x			6
					m_7 = 2 →						x	x	7

$$\Longrightarrow m_{max} \equiv m_4 = 6 \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{A}} = \begin{bmatrix} x & x & & x & & \\ x & & x & & & \\ x & x & & & x & \\ x & & & x & x & x \\ x & & x & x & & \\ x & & x & & & \\ x & x & & & & \end{bmatrix}$$

Beschreibung der Eingabedaten für GAUSS2:

AL: Eindimensionales REAL*4 Feld

IL: Eindimensionales INTEGER*4 Feld

AL oder IL muß ein Feld des COMMON-Bereichs sein. Seine Länge wird im Hauptprogramm festgelegt. In GAUSS2 werden die beiden Felder durch eine EQUIVALENCE-Anweisung übereinander gelegt, so daß wahlweise REAL- oder INTEGER-Größen in den COMMON gespeichert werden können. Die ersten 350 Elemente dieser Felder sind für die Übertragung einfacher Variablen reserviert.

IL(63) = N	$\hat{=}$ n	: Zeilenzahl von $\underline{A}$
IL(60) = M	$\hat{=}$ m	: Spaltenzahl von $\underline{A}$
IL(52) = M1	$\hat{=}$ m_1	: untere Bandbreite von $\underline{A}$ nach Abschnitt 14.1
IL(59) = M121	$\hat{=}$ m_{max}	: Spaltenzahl von $\underline{\bar{A}}$
IL(67) = NMAN		: Anfangsadresse der Matrix $\underline{\bar{A}}$
IL(10) = IEND		: Adresse des letztbelegten Elementes im Common
IL(4) = LANG		: Länge des Common-Bereichs im Hauptprogramm (LANG > 350)
IL(99) = EPS		: Maschinengenauigkeit (= $3{,}0 \cdot 10^{-11}$ für Telefunkenrechener TR 445)
IL(5) = ID1		: Nummer einer Hintergrunddatei mit direktem Satzzugriff zum Zwischenspeichern der oberen Dreiecksmatrix
IL(8) = ID4		: Nummer einer sequentiellen Datei zum Abspeichern der Spalten von $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$

IL(3) = KA : Kanalnummer des Druckers

IL(113) = LMAT: Parameter zur Steuerung der Ausgabe (z.B. zum Testen)
LMAT = 0: keine Ausgabe
LMAT ≠ 0: ausführliche Ausgabe

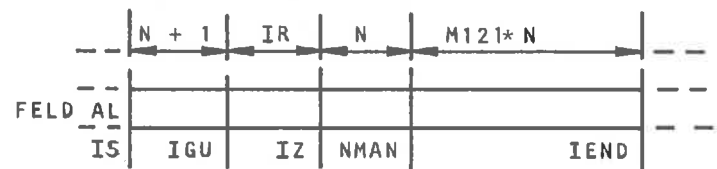
IL(29) = IS : Anfangsadresse des Vektors der Länge N + 1, dessen erste N Elemente mit den Elementen von $\underline{z}$ vorbelegt sind (IS > 351)

IL(25) = IGU : Anfangsadresse eines Hilfsvektors der Länge IR = M - N; dieser Vektor braucht nicht vorbelegt zu sein

IL(28) = IZ : Anfangsadresse eines Hilfsvektors der Länge N, der nicht vorbelegt ist

Alle oben aufgelisteten Parameter müssen vor dem Aufruf von GAUSS2 belegt sein (mit Ausnahme der Vektoren mit den Anfangsadressen IGU und IZ). Die Zeilen von $\overline{\underline{A}}$ müssen mit der konstanten Länge M121 $\hat{=}$ m_{max} vorliegen.

Common-Belegung vor dem Aufruf von GAUSS2:



Beschreibung der Ausgabedaten:

Nach dem Aufruf von GAUSS2 stehen dem aufrufenden Programm die Matrizen $\underline{B}_o$ und $\underline{B}_x$ zur Verfügung.

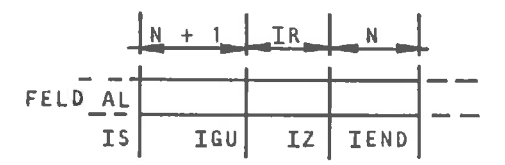
IL(29) = IS : Anfangsadresse des Vektors, der die Nummern der Unbekannten enthält, die nicht als freie Variable gewählt wurden

IL(25) = IGU : Anfangsadresse des Vektors, der die Nummern der Unbekannten enthält, die als freie Variable gewählt wurden

IL(28) = IZ : Anfangsadresse des Zeilenvertauschungsvektors

IL(10) = IEND: Adresse des zuletzt belegten Speicherplatzes

COMMON-Belegung nach dem Aufruf von GAUSS2:



Die Matrizen $\underline{B}_0$ und $\underline{B}_x$ sind spaltenweise in der Datei ID4 abgespeichert. Die ersten N Sätze der Datei ID4 enthalten die Vektoren von $\underline{B}_0$ in der vollen Länge M. Die restlichen IR Sätze von ID4 sind die aktuell belegten Teile der Spalten von $\underline{B}_x$. Jeder Satz bezüglich $\underline{B}_x$ hat den folgenden Aufbau:

$$I3, L1, b_i, b_{i-1}, b_{i-2}, \ldots, b_{i-L1} .$$

Hierbei ist b_{i-L1} das erste und b_i das letzte Nichtnullelement einer Spalte von $\underline{B}_x$. Die j-te Spalte sei beispielsweise:

$$\underbrace{\hphantom{xx}}_{}\quad M = 21$$

$$\underline{B}_{xj}^T = [0\ 0\ 0\ 0\ a\ b\ 0\ c\ 0\ 0\ d\ e\ f\ 0\ g\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] .$$

$$L1 = 11 \qquad I3 = 6$$

Dann hat der i-te Satz der Datei ID4 die Form:

$$6,\ 11,\ g,\ 0,\ f,\ e,\ d,\ 0,\ 0,\ c,\ 0,\ b,\ a\ .$$

Programm

```
      SUBROUTINE GAUSS2
CTEST,ZERLEGUNG  ,VERSION=02.02.1978*TOPCU
CZERLEGUNG DER KOMPAKT GESPEICHERTEN MATRIX A (AQUER)
CBERECHNUNG DER RECHTSINVERSEN B0
CUND DES KERNS BX
CAUFZURUFENDE PROGRAMME: BNULL, MATAUS
CGETESTET AUF TELEFUNKENRECHNER TR 445
      COMMON AL(500)
      DIMENSION IL(500)
      EQUIVALENCE (IL(1),AL(1)),
     *(IL(3),KA),(IL(10),IEND),(IL(63),N),
     *(IL(60),M),(IL(59),M121),(IL(67),NMAN),
     *(IL(52),M1),(IL(25),IGU),(IL(71),IP)
     *,(IL(28),IZ),(IL(29),IS),(IL(32),IU)
     *,(IL(96),IR),(IL(44),IUEB),(IL(113),LMAT)
     *,(IL(4),LANG),(AL(99),EPS)
     *,(IL(5),ID1),(IL(8),ID4)
      IR=M-N
CABFRAGE, OB MATRIX A SINGULAER
      IF(IR.LT.0) GO TO 310
      WRITE(KA,3) N,M,IR,M1,M121
3     FORMAT(//' SYSTEMPARAMETER:'/
     */' N    =',I4,'  (GLEICHUNGEN)'
     */' M    =',I4,'  (UNBEKANNTEN)'
     */' IR   =',I4,'  (REDUNDANZ)'
     */' M1   =',I4,'  (UNTERE BANDBREITE)'
     */' M121=',I4,'  (HAUPTBANDBREITE)')
CVORBESETZUNGEN
      IU=IEND+1
      IREST=M1
      IUEB=0
      K5=IU+1
      K1=0
      J1=0
      IL(IS+N+1)=M+1
      N1=N-1
      M12=M121-1
      MAT1=NMAN+1
      DO 38 I=1,IR
38    IL(IGU+I)=0
CNORM DER MATRIX(WILKINSON)
      GR=0.                              (A)
      NNF=MAT1+M121*N1
      DO 10 I=MAT1,NNF,M121
      T=0.
      K2=I+M12
      DO 20 J=I,K2
20    T=T+ABS(AL(J))
10    IF(T.GT.GR) GR=T
      GR=GR*EPS
      IF(LMAT.NE.0) WRITE(KA,205)
205   FORMAT(//' DIE NICHTNULL-ELEMENTE MIT IHREN
     *'/' RELATIVEN ADRESSEN DER UNTEREN'/
     *' DREIECKSMATRIX:'/)
      DO 11 K=MAT1,NNF,M121
      K1=K1+1
70    J1=J1+1
      K2=K+IREST*M121
      IF(K2.GT.NNF) K2=NNF
      IF(LMAT.NE.0) WRITE(KA,36) J1
36    FORMAT(' SCHRITT:',I4)
CPIVOTSUCHE
      IVER=0
      K4=K1
      A=0.
      DO 60 K3=K,K2,M121
      IF(IL(IS+K4).GT.J1) GO TO 60
      T=ABS(AL(K3))
      IF(T.LE.A) GO TO 60
      A=T
      IVER=K4
60    K4=K4+1
      IF(A.GT.GR) GO TO 63
CWAHL EINER FREIEN VARIABLEN
      IUEB=IUEB+1
      IF(IUEB.GT.IR) GO TO 310
      IL(IGU+IUEB)=J1
      IREST=IREST+1
      GO TO 70
63    J2=K+M12
      I2=IS+K1
      IF(IVER.EQ.K1) GO TO 100
CZEILENTAUSCH
      J3=IS+IVER
```

```
      J4=IL(I2)
      IL(I2)=IL(J3)
      IL(J3)=J4
      IDV=M121*(IVER-K1)
      DO 110 I=K,J2
      J4=IL(I)
      ID=I+IDV
      IL(I)=IL(ID)
110   IL(ID)=J4
CVORWAERTSZERLEGUNG
100   K4=1
      IU1=K5
      J3=K+1
      J4=J2+1
      DO 121 K3=J4,K2,M121
      I3=I2+K4
      I1=IL(I3)
      IF(I1.GT.J1) GO TO 121
      IDV=K4*M121
      T=AL(K3)/AL(K)
      K5=K5+1
      IL(K5)=K4
      K5=K5+1
      AL(K5)=T
      IT=1
      DO 120 J6=J3,J2
      A=AL(J6+IDV)-AL(J6)*T
      IF(ABS(A).GT.GR) GO TO 190
      AL(J6+IDV)=0.
120   IT=IT+1
CZEILE LINEAR-ABHAENGIG, NACH 310
      GO TO 310
190   I4=J3+IT-1
      DO 122 J6=I4,J2
      ID=J6+IDV
122   AL(ID-IT)=AL(ID)-AL(J6)*T
      I4=ID-IT+1
      DO 123 J6=I4,ID
123   AL(J6)=0.
      IL(I3)=I1+IT
121   K4=K4+1
      IL(IU1)=K5
      IL(IZ+K1)=IVER
      IF(IU1.EQ.K5) GO TO 2503
      IU11=IU1+1
      WRITE(KA,35)(IL(I),I=IU11,K5,2)
      IU12=IU1+2
      WRITE(KA,2500)(AL(I),I=IU12,K5,2)
2503  K5=K5+1
2500  FORMAT(5(X,E12.6))
      IF(LANG.LE.K5+IREST) GO TO 131      ---- (B)
11    CONTINUE
35    FORMAT(15(X,I4))
CENDE DER ZERLEGUNG
      IF(LMAT.EQ.0)GOTO 158
      WRITE(KA,159)
159   FORMAT(//' OBERE DREIECKSMATRIX:')
      CALL MATAUS(NMAN,N,M121)
158   WRITE(KA,201)
201   FORMAT(//' ZEILENVERTAUSCHUNGSVEKTOR IZ:'/)
      WRITE(KA,35)(IL(IZ+I),I=1,N)
      WRITE(KA,202)
202   FORMAT(//' VEKTOR IS:'/)
      WRITE(KA,35)(IL(IS+I),I=1,N)
CBERECHNUNG DER MATRIX BO
      M11=M+1
      REWIND ID4
      IF(LMAT.NE.0) WRITE(KA,26)      ---- (C)
26    FORMAT(//' BO-VEKTOREN (SPALTENWEISE AUSGABE):')
      IP=K5+1
      IF(LANG.LT.IP+M) GO TO 131
      DO 23 I=1,N
      DO 24 J=1,M11
24    AL(IP+J)=0.
      AL(IP+IL(IS+I))=1.
      CALL BNULL
CI-TE VEKTOR VON BO IN DER DATEI ID4
      WRITE(ID4) (AL(IP+J),J=1,M)
23    IF(LMAT.NE.0) CALL MATAUS(IP,1,M)      ---- (D)
CRETURN, WENN MATRIX A QUADRATISCH UND NICHT SINGULAER
C ES WIRD NUR DIE INVERSE DER MATRIX A BERECHNET
      IF(IR.EQ.0) RETURN
      IREST=IR-IUEB
      NIUEB=N+IUEB
      IF(IREST)310,182,183
183   DO 181 I=1,IREST
181   IL(IGU+IUEB+I)=NIUEB+I
      WRITE(KA,203)
```

```
203    FORMAT(//' FREIE VARIABLE :'/)
182    WRITE(KA,35)(IL(IGU+I),I=1,IR)
CBERECHNUNG VON BX (KOMPAKT)
CMB1=UNTERE BANDBREITE          (E)
       REWIND ID1
       MB=0
       MB1=0
       IS2=IU
       I1=IEND+1
       DO 170 I=1,N
       DO 171 J=1,M121
       IF(AL(I1-J).NE.0.) GO TO 172
171    CONTINUE
172    I2=M121-J+1
       I3=M-IL(IGU-I)-I2+2
       WRITE(ID1)I3,I2,(AL(I1-K),K=J,M121)
       I4=I-I3
       IF(MB1.LT.I4) MB1=I4
       IF(MB.LT.I2) MB=I2
170    I1=I1-M121
       MB2=MB-MB1-1
       MB12=MB1+MB2
       WRITE(6,351) MB1,MB
351    FORMAT(//' BANDBREITEN BEI RUECKWAERTS'     (F)
      &'ZERLEGUNG:'//' M1   =',I4/' M121=',I4)
       IU1=0
       IGU2=IS2+N+1
       IBX=IGU2+IR
       IV1=IBX+M
       IF(LANG.LT.IV1+M) GO TO 131
       IL(IS2+N+1)=2*M
       IF(LMAT.NE.0) WRITE(KA,28)
28     FORMAT(/' KOMPAKTE BX-VEKTOREN (SPALTENWEISE'
      */' AUSGABE DES BESETZTEN BEREICHS):')
1171   I1=IL(IGU+IU1+1)
       I2=I1-IU1-1
       I3=M-I1
       IF(I1.NE.IU1+1) GO TO 188
       J1=I3+1
       L5=IBX+1
       L1=1
       AL(L5)=1.
       GO TO 187
188    I4=N-I2
       NNF=MAT1+I2*MB
       IREST=I3-I4+MB1
       IU11=0
       IL(IGU2+1)=0
       I5=NMAN
       DO 173 I=1,I2
       I9=I4+I
       READ(ID1'I9) IL(IS2+I9),I9,(AL(I5+K),K=1,I9)
       I9=I9+1
       DO 174 K=I9,MB
174    AL(I5+K)=0.
       I5=I5+MB
173    CONTINUE          (G)
CRUECKWAERTSZERLEGUNG DER IU1+1-TEN
CKOEFFIZIENTENMATRIX
       K1=I4
       J1=I3
       DO 111 K=MAT1,NNF,MB
       K1=K1+1
1170   J1=J1+1
       K2=K+IREST*MB
       IF(K2.GT.NNF) K2=NNF
CPIVOTSUCHE
       IVER=0
       K4=K1
       A=0.
       DO 160 K3=K,K2,MB
156    IF(IL(IS2+K4)-J1) 151,152,160
151    IT=J1-IL(IS2+K4)
       J2=K3+IT
       J3=K3+MB12
       DO 153 J=J2,J3
       IF(ABS(AL(J)).GT.GR) GO TO 154
153    IT=IT+1
154    J2=K3+IT
       DO 155 J=J2,J3
155    AL(J-IT)=AL(J)
       J2=J3-IT+1
       DO 157 J=J2,J3
157    AL(J)=0.
       IL(IS2+K4)=IL(IS2+K4)+IT
       GO TO 156
152    T=ABS(AL(K3))
       IF(T.LE.A) GO TO 160
```

```
      A=T
      IVER=K4
160   K4=K4+1
COB SPALTE LINEAR ABHAENGIG
      IF(A.NE.0.) GO TO 163
      IF(IL(IV1+J1).NE.1) GO TO 9
      IU11=IU11+1
      IL(IGU2+IU11)=J1
      IREST=IREST+1
      GO TO 1170
9     L1=J1-I3
      L5=IBX+L1
      AL(L5)=1.
      IF(L1.EQ.1) GO TO 187
      J2=L1-1
      L3=K
      K4=IL(IGU2+IU11)
      DO 185 I=1,J2
      L4=L5-I
      IF(J1-I-K4) 167,168,167
168   AL(L4)=0.
      IU11=IU11-1
      K4=IL(IGU2+IU11)
      GO TO 185
167   A=0.
      L3=L3-MB
      I9=I
      IF(I9.GT.MB12) I9=MB12
      DO 186 J=1,I9
186   A=A+AL(L4+J)*AL(L3+J)
      AL(L4)=-A/AL(L3)
185   CONTINUE
      GO TO 187
163   J2=K+MB12
      L5=IS2+K1
      IF(IVER.EQ.K1) GO TO 1100
CZEILENTAUSCH
      J3=IS2+IVER
      J4=IL(L5)
      IL(L5)=IL(J3)
      IL(J3)=J4
      IDV=MB*(IVER-K1)
      DO 1110 I=K,J2
      J4=IL(I)
      ID=I+IDV
      IL(I)=IL(ID)
1110  IL(ID)=J4
CZERLEGUNG
1100  K4=0
      J3=K+1
      J4=J2+1
      DO 1121 K3=J4,K2,MB
      K4=K4+1
      IDV=K4*MB
      L3=L5+K4
      L4=IL(L3)
      IF(L4.GT.J1) GO TO 1121
      T=AL(K3)/AL(K)
      IT=1
      DO 1120 J6=J3,J2
      A=AL(J6+IDV)-AL(J6)*T
      IF(ABS(A).GT.GR) GO TO 1190
      AL(J6+IDV)=0.
1120  IT=IT+1
      GO TO 310
1190  K5=J3+IT-1
      DO 1122 J6=K5,J2
      ID=J6+IDV
1122  AL(ID-IT)=AL(ID)-AL(J6)*T
      K5=ID-IT+1
      DO 1123 J6=K5,ID
1123  AL(J6)=0.
      IL(L3)=L4+IT
1121  CONTINUE
111   CONTINUE
187   IL(IV1+J1)=1
      L3=L5+1
CDER IU1+1-TE KOMPAKTE VEKTOR VON BX IN DER DATEI ID4
      I3=M-J1
      WRITE(ID4) I3,L1,(AL(L3-J),J=1,L1)
      IF(LMAT.NE.0)WRITE(KA,414)I3,L1,
     *(AL(L3-J),J=1,L1)
414   FORMAT(/' I3=',I4,3X,'L1=',I4/(5(X,E12.6)))
      IU1=IU1+1
      IF(IR.GT.IU1) GOTO 1171 ———— (H)
CENDE DER BERECHNUNG VON GAUSS2
      IEND=NMAN
      RETURN
```

```
310    STOP' **** MATRIX A SINGULAER GAUSS2'
131    STOP' **** COMMON ZU KLEIN-GAUSS2'
       END


       SUBROUTINE MATAUS(NMAN,N,MB)
CAUSGABE ZUM TESTEN
CAUFRUFENDES PROGRAMM: GAUSS2
       COMMON AL(500)
       DO 1I=1,N
       I1=NMAN+(I-1)*MB
1      WRITE(6,2)(AL(I1+J),J=1,MB)
2      FORMAT(/(5(X,E12.6)))
C ENDE DER SUBROUTINE MATAUS
       RETURN
       END


       SUBROUTINE BNULL
CBERECHNUNG EINER SPALTE VON BO
CAUFRUFENDES PROGRAMM: GAUSS2
       COMMON IL(500)
       DIMENSION AL(500)
       EQUIVALENCE (IL(1),AL(1)),
      *(IL(60),M),(IL(63),N),(IL(67).NMAN) -
      *,(IL(59),M121),(IL(28),IZ),(IL(29),IS)
      *,(IL(32),IU),(IL(71),IP)
       M11=M+1
       N1=N-1
       K5=IU+1
       DO 10 I=1,N1
       ISI=IS+I
       IVER=IL(IZ+I)
       L1=IP+IL(ISI)
       IF(IVER.EQ.I) GO TO 11
CVERTAUSCHEN DER RECHTEN SEITE
       L2=IP+IL(IS+IVER)
       T=AL(L1)
       AL(L1)=AL(L2)
       AL(L2)=T
CVORWAETSEINSETZEN IN L
11     K6=IL(K5)
       IF(K6.EQ.K5) GO TO 10
       K5=K5+1
       DO 12 K3=K5,K6,2
       L=IP+IL(ISI+IL(K3))
       AL(L)=AL(L)-AL(L1)*AL(K3+1)
12     CONTINUE
10     K5=K6+1
CRUECKWAERTSEINSETZEN IN R
       M12=M121-1
       J=NMAN+M121*N1+1
       I1=N
       DO 16 I=1,N
       ISP=IL(IS+I1)
       L1=IP+ISP
       T=0.
       IF(M12.EQ.0) GO TO 17
       K3=M11-ISP
       IF(K3.GT.M12) K3=M12
       DO 15 K2=1,K3
15     T=T+AL(J+K2)*AL(L1+K2)
17     AL(L1)=(AL(L1)-T)/AL(J)
       I1=I1-1
16     J=J-M121
C ENDE DER SUBROUTINE BNULL
       RETURN
       END
```

Von Marke A bis Marke B:

Anwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens auf $\underline{A}$ und Aufstellen der Matrizen $\underline{L}$ und $\underline{U}$; Wahl der statisch Unbestimmten.

Von Marke C bis Marke D:

Spaltenweise Berechnung und Abspeichern (in der Datei ID4) der Matrix $\underline{B}_o$.

Von Marke E bis Marke F:

Die obere Dreiecksmatrix wird zur Berechnung von $\underline{B}_x$ umtransformiert und in die Datei ID1 geschrieben.

Von Marke F bis Marke G:

Die Koeffizientenmatrix der IU+1-ten Spalte von $\underline{B}_x$ wird aus der Datei ID1 in den Kern gebracht.

Von Marke G bis Marke H:

Anwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens zur Berechnung des besetzten Teils der IU+1-ten Saplte von $\underline{B}_x$; Abspeichern in der Datei ID4.

A2.2 Eigenwertprobleme

A2.2.1 Problemstellung und Eigenschaften der Lösungen

Wir beschränken uns hier auf Eigenwertprobleme für Matrizengleichungen und auch hier noch auf die einfachsten Probleme, wie sie in der linearisierten Stabilitätstheorie auftreten. Für weitergehende Ausführungen und für die Darstellung von Lösungsverfahren verweisen wir auf die umfangreiche Literatur (*Eigenwertprobleme*).

Man unterscheidet zwei Problemstellungen:

Die spezielle Eigenwertaufgabe

$$(\underline{A} - \lambda\, \underline{I})\underline{x} = \underline{0} \qquad \text{(A2.21)}$$

und die

allgemeine Eigenwertaufgabe:

$$(\underline{A} - \lambda\, \underline{B})\underline{x} = \underline{0}\ . \qquad \text{(A2.22)}$$

$\underline{A}_{n\times n}$: beliebige Matrix (reell, komplex), hier reell,

$\underline{B}_{n\times n}$: nichtsinguläre Matrix, es kann auch anstelle von $\underline{B}$ die Matrix $\underline{A}$ als nichtsingulär vorausgesetzt werden; auch $\underline{B}$ wird hier als reell vorausgesetzt.

λ: Skalar, es gibt n Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die diese Gleichungen erfüllen; sie können reell oder komplex sein, auch bei reellen $\underline{A}$ und $\underline{B}$; es sind die *Eigenwerte*.

$\underline{x}_{n\times 1}$: Es gibt n Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$, die den Eigenwerten zugeordnet sind; es sind die *Eigenvektoren*.
Man bezeichnet $\underline{x}$ als *Rechtseigenvektor*, zur Unterscheidung von $\underline{y}$ als *Linkseigenvektor:*

$$\underline{y}^T(\underline{A} - \lambda\, \underline{B}) = \underline{0}\ .$$

In Sonderfällen stimmen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ überein.

Für Eigenwerte gibt es eine Reihe von Sätzen, die wichtigsten sind im folgenden zusammengestellt:

(a) *Die spezielle Eigenwertaufgabe*

(1) Die spezielle Eigenwertaufgabe besitzt genau n reelle oder komplexe Eigenwerte λ_i als Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$\det(\underline{A} - \lambda\, \underline{I}) = 0\ . \qquad \text{(A2.23)}$$

Jedem Eigenwert ist mit der Vielfachheit seines Auftretens ein Eigenvektor $\underline{x}$ (und $\underline{y}$) zugeordnet.

(2) Die Anzahl der Eigenwerte, die ungleich Null sind,

stimmt mit dem Rang r von $\underline{A}_{n \times n}$ überein, oder:
Die Anzahl der Nulleigenwerte $\lambda_i = 0$ stimmt mit dem Rangabfall $n - r = \rho$ überein.

(3) Es gibt nur dann mindestens einen Eigenwert $\lambda_i = 0$, wenn $\det(\underline{A}) = 0$.

(4) Die *Spur* $sp(\underline{A})$ der Matrix $\underline{A}$ ist gleich der Summe der Eigenwerte:

$$sp(\underline{A}) = \sum_i A_{ii} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \; . \qquad (A2.24)$$

(5) Die Determinante der Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte:

$$\det(\underline{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \; . \qquad (A2.25)$$

(6) Die Linkseigenvektoren und Rechtseigenvektoren $\underline{x}_i$, $\underline{y}_k$ zweier verschiedener Eigenwerte $\lambda_i \neq \lambda_k$ sind zueinander *orthogonal:*

$$\underline{x}_i^T \underline{y}_k = 0 \; .$$

(7) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Zu einem einfachen Eigenwert gibt es genau einen Eigenvektor und zu einem ρ-fachen Eigenwert gibt es mindestens einen und höchstens ρ linear unabhängige Eigenvektoren.

(b) *Die allgemeine Eigenwertaufgabe*
Nach Voraussetzung ist $\underline{B}$ positiv definit; man könnte deshalb durch Linksmultiplikation mit $\underline{B}^{-1}$ die allgemeine Eigenwertaufgabe auf die spezielle zurückführen:

$$(\underline{B}^{-1} \underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{x} = \underline{0} \; . \qquad (A2.26)$$

Alle Sätze für die spezielle Eigenwertaufgabe gelten damit auch für die allgemeine. Diese Transformation wird man jedoch im allgemeinen vermeiden, da sie eine eventuell vorhandene Bandstruktur von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zerstört und auch numerisch sehr aufwendig ist.

Für *symmetrische Matrizen* $\underline{A}$ *und* $\underline{B}$ gibt es drei weitere wesentliche Sätze:

(8) Die Eigenwerte λ_i bei symmetrischen Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind reell.

(9) Die Eigenwerte λ_i bei symmetrischen Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$, und $\underline{A}$ *oder* $\underline{B}$ positiv definit, sind positiv.

(10) Bei symmetrischen Matrizen sind Links- und Rechtseigenvektoren gleich.

Die Transformation des allgemeinen in das spezielle Eigenwertproblem nach Gleichung (A2.26) bewirkt, daß das Matrizenprodukt $\underline{B}^{-1}\,\underline{A}$ nicht mehr symmetrisch ist. Die Bandstruktur ist ebenfalls zerstört.

Unter der Voraussetzung, daß die Matrix $\underline{A}$ symmetrisch und positiv definit ist, kann sie mit dem Verfahren von Cholesky (Anhang A2.1.4) zerlegt werden:

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{L}^T .$$

Damit wird das allgemeine Eigenwertproblem zu:

$$\underline{L}\,\underline{L}^T\,\underline{x} - \lambda\,\underline{B}\,\underline{x} = \underline{0} . \qquad \text{(A2.27)}$$

Substituiert man hierbei $\underline{L}^T\,\underline{x}$ durch $\underline{y}$, so gilt:

$$\underline{y} = \underline{L}^T\,\underline{x} \quad \text{und} \quad \underline{x} = (\underline{L}^{-1})^T\,\underline{y} .$$

Eingesetzt in (A2.27) erhält man:

$$\underline{L}\,\underline{y} - \lambda\,\underline{B}\,(\underline{L}^{-1})^T\,\underline{y} = \underline{0} . \qquad \text{(A2.28)}$$

Durch formale Erweiterung mit $\underline{L}^{-1}$ von links wird (A2.28) zu:

$$\underline{I}\,\underline{y} - \lambda\,\underline{L}^{-1}\,\underline{B}\,(\underline{L}^{-1})^T\,\underline{y} = \underline{0} .$$

Damit ist das allgemeine Eigenwertproblem in das spezielle überführt:

$$(\tilde{\underline{A}} - \tilde{\lambda}\,\underline{I})\underline{y} = \underline{0}$$

mit $\tilde{\underline{A}} = \underline{L}^{-1}\,\underline{B}\,(\underline{L}^{-1})^T$ und $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$.

Die Eigenvektoren und Eigenwerte dieses speziellen Eigenwertproblems lassen sich in die Eigenwerte und Eigenvektoren des allgemeinen Eigenwertproblems transformieren. Es gilt:

$$\lambda = 1/\bar{\lambda} \quad \text{und} \quad \underline{x} = (\underline{L}^{-1})^T \underline{y} \ .$$

A2.2.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren mit der charakteristischen Gleichung

Die Lösung einer Eigenwertaufgabe mit der charakteristischen Gleichung besitzt wenig praktische Bedeutung für größere Matrizen. Wir zeigen den Lösungsweg deshalb hier nur für ein einfaches

Beispiel:

Gegeben ist die spezielle Eigenwertaufgabe:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & \underline{0} \\ & 1 & \\ \underline{0} & & 1 \end{bmatrix} \right) \underline{x} = \underline{0} \ . \qquad \text{(A2.29)}$$

Man erhält die charakteristische Gleichung (vgl. (A2.23))

$$\det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

deren Nullstellen λ_1, λ_2 und λ_3 zu bestimmen sind.
Wir betrachten zunächst die Determinante:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 3-\lambda & 1 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 1 & -1-\lambda \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \end{array} \right|$$

$$= (\lambda-3)(1+\lambda)(1-\lambda) + 2 - (1-\lambda) = 0 \ .$$

Gesucht sind die Nullstellen von:

$$(1+\lambda)\,[(\lambda-3)(1-\lambda) + 1] = 0 \ .$$

Die erste Nullstelle ist

$$\lambda_1 = -1 \ ,$$

die zweite und dritte erhält man durch Nullsetzen der eckigen Klammer aus:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$$

$$\text{zu} \quad \lambda_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2} \ .$$

Es ergeben sich also drei reelle Eigenwerte.
Wir zeigen zunächst einige einfache Kontrollen:
Nach Satz (4) ist die Spur von $\underline{A}$ gleich der Summe der Eigenwerte:

$$sp(\underline{A}) = 3 \equiv -1 + (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) \ .$$

Nach Satz (5) ist die Determinante von $\underline{A}$ gleich dem Produkt der Eigenwerte:

$$\det(\underline{A}) = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 1 = -2 \equiv (-1)(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$$

(Berechnung nach Gleichung (A1.1))

Die Determinante ist ungleich Null: $\underline{A}$ ist nichtsingulär und es gibt keinen Nulleigenwert (Satz (3)).
Im folgenden wird nun der erste Rechtseigenvektor berechnet. Durch Einsetzen von $\lambda_1 = -1$ erhält man aus (A2.29) ein homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \ .$$

Nach Satz (7) besitzt es eine Lösung; wir können also über eine der Komponenten von $\underline{x}_1$ frei verfügen, z.B. $x_3 = \alpha$ setzen. Dies ergibt:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix des Restsystemes besitzt genau eine linear abhängige Zeile: Die zweite oder dritte Zeile. Durch Streichen einer der beiden ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung:

$$x_1 = -\alpha \quad \text{und} \quad x_2 = 4\alpha \ .$$

Damit ist der erste Rechtseigenvektor bekannt:

$$\underline{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aus dem Rechengang erkennt man, daß der Eigenvektor nur bis auf einen Faktor α bestimmt ist. Üblicherweise werden die Eigenvektoren *normiert*, so daß:

$$\left\| \underline{x}_i \right\| = \sqrt{\underline{x}_i^T \, \underline{x}_i} = 1 \ .$$

Im vorliegenden Fall ergibt dies einen Faktor:

$$\alpha = \sqrt{2}/6 \ .$$

Die übrigen Eigenvektoren werden analog berechnet.

A2.2.3 Iterative Lösung nach R. von Mises

Das von Mises'sche Iterationsverfahren ist für die Lösung von Stabilitätsproblemen gut geeignet:

- Die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblemes wird unter Beibehaltung der Struktur der Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ erhalten (z.B. Bandstruktur).
- Es liefert den größten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor.

Voraussetzung:

$\underline{A}$ und $\underline{B}$ sind beide reelle symmetrische Matrizen, $\underline{B}$ ist po-

sitiv definit.

Problemstellung:

$$(\underline{A} - \lambda\ \underline{B})\underline{x} = \underline{0}\ .$$

Gesucht ist der größte Eigenwert $\lambda_{max} > 0$ und der zugehörige Eigenvektor $\underline{x}$.

Iterationsanfang:

$$\lambda_0 > 0\ ,\quad \underline{x}_0 \neq \underline{0} \text{ sonst beliebig .}$$

ν-te Iteration:
Lösung des Gleichungssystemes

$$\underline{B}\ \underline{x}_{\nu+1} = \underline{A}\ \underline{x}_{\nu}\ . \qquad \text{(A2.30)}$$

Berechnung des genäherten Eigenwertes (*Rayleigh-Quotient*):

$$\lambda_\nu = \frac{\underline{x}_\nu^T\ \underline{A}\ \underline{x}_\nu}{\underline{x}_\nu^T\ \underline{B}\ \underline{x}_\nu} \equiv \frac{\underline{x}_\nu^T\ \underline{B}\ \underline{x}_{\nu+1}}{\underline{x}_\nu^T\ \underline{B}\ \underline{x}_\nu}\ . \qquad \text{(A2.31)}$$

Iterationsende:

$$|(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})/\lambda_{\nu-1}| < \text{Fehlerschranke .}$$

Es läßt sich zeigen, daß das Iterationsverfahren konvergiert /96/:

$$\lambda_\nu \to \lambda_{max} \quad \text{und} \quad \underline{x}_\nu \to \underline{x}\ .$$

Wenn höhere Eigenwerte zu berechnen sind, gibt es leistungsfähigere, direkte Verfahren /88/.
Wenn anstelle von $\underline{B}$ die Matrix $\underline{A}$ positiv definit ist, erweitert man (A2.16) mit $1/\lambda$ und substituiert $1/\lambda$ durch Λ.
Im Falle der allgemeinen Eigenwertaufgabe ist in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem (A2.30) zu lösen. Die Lösung erfolgt mit dem Cholesky-Verfahren mit Dreieckszerlegung und Vorwärts-Rückwärtseinsetzen im ersten Schritt; in allen folgenden Schritten bleibt die Dreieckszerlegung unverändert und es ist nur Vorwärts-Rückwärtseinsetzen erforderlich.

Mit der in A2.2.1 gezeigten Transformation kann man das allgemeine Eigenwertproblem in das spezielle transformieren. Beim speziellen Eigenwertproblem kann man sich die Lösung des Gleichungssystems (A2.30) in jedem Iterationsschritt sparen. Die Iteration nach R. von Mises für das spezielle Eigenwertproblem ist im folgenden zusammengestellt:

Problemstellung:

$$(\underline{A} - \lambda\,\underline{I})\underline{x} = \underline{0}\ .$$

Gesucht ist der größte Eigenwert $\lambda_{max} > 0$ und der zugehörige Eigenvektor $\underline{x}$.

Iterationsanfang:

$$\lambda_0 > 0\ ,\quad \underline{x}_0 \neq \underline{0} \text{ sonst beliebig}\ .$$

ν-te Iteration:
genäherter Eigenvektor

$$\underline{x}_{\nu+1} = \underline{A}\,\underline{x}_\nu\ , \tag{A2.32}$$

genäherter Eigenwert

$$\lambda_\nu = \frac{\underline{x}_\nu^T\,\underline{A}\,\underline{x}_\nu}{\underline{x}_\nu^T\,\underline{x}_\nu} = \frac{\underline{x}_\nu^T\,\underline{x}_{\nu+1}}{\underline{x}_\nu^T\,\underline{x}_\nu}\ . \tag{A2.33}$$

Iterationsende:

$$|(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})/\lambda_{\nu-1}| < \text{Fehlerschranke}$$

Wir zeigen das Iterationsverfahren hier an einem einfachen *Beispiel:*
Gegeben ist das spezielle Eigenwertproblem:

$$\left(\begin{bmatrix}10 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 3\\ 6 & 3 & 5\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\underline{x} = \underline{0}\ .$$

Gesucht sind λ_{max} und $\underline{x}$.

Die Berechnung erfolgt in Form zweier Tabellen:

$\underline{A}$			$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_4/\|\underline{x}_4\|$
10	2	6	1	18	280	4216	63080	0,7852
2	3	3	1	8	102	1472	21836	0,2718
6	3	5	1	14	202	2996	44692	0,5563

Iteration	λ	Δ [%]
1	13,3333	
2	14,8699	10,33
3	14,9359	0,44
4	14,9386	0,02

$$\Delta = 100 \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\lambda_{\nu-1}} .$$

Der exakte Eigenwert ist $\lambda = 14{,}9387$ und der exakte Eigenvektor hat die Form:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0{,}7855 \\ 0{,}2713 \\ 0{,}5561 \end{bmatrix}$$

A3 Elementkatalog

Für die folgenden Elemente sind die Elementmatrizen zusammengestellt:

Fachwerkelemente (a) eben
(b) räumlich

Stabelemente (a) räumlich
(b) Trägerrost
(c) eben mit N_r, M_ℓ, M_r als F_1, F_2, F_3
(d) eben mit N_r, Q_r, M_r als F_1, F_2, F_3
(e) eben mit Momentengelenk

Federelemente (a) Senkfeder in der Ebene
(b) Drehfeder in der Ebene.

Zusammenstellung der Matrizen $\underline{T}^i$, $\underline{L}_D{}^i$, $(\underline{a}^i)^T$, $\underline{f}^i$, $\underline{k}_r^i$, $\underline{k}^i$ und $\underline{k}_g^i$ für die Transformationen:

$$(3.3)\quad \underline{\bar{S}}^i = \underline{T}^i\,\underline{F}^i\,,$$

$$(3.4)\quad \underline{S}^i = \underline{L}_D{}^i\,\underline{\bar{S}}^i\,,$$

$$(3.5)\quad \underline{\bar{S}}^i = (\underline{L}_D{}^i)^T\,\underline{S}^i\,,$$

$$(3.9)\quad \underline{S}^i = (\underline{a}^i)^T\,\underline{F}^i = \underline{L}_D{}^i\,\underline{T}^i\,\underline{F}^i\,,$$

$$(5.4)\quad \underline{v}^i = \underline{f}^i\,\underline{F}^i\,,$$

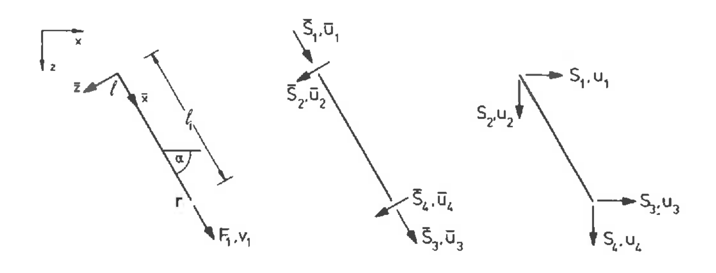
$$(6.1)\quad \underline{F}^i = \underline{k}_r^i\,\underline{v}^i\,,$$

$$(6.13)\quad \underline{S}^i = \underline{k}^i\,\underline{u}^i\,,$$

$$(12.37)\quad \underline{S}^i(\lambda) = \underline{k}_e^i\,\underline{u}^i + \lambda\,\underline{k}_g^i\,\underline{u}^i\,.$$

In Matrizen wird für die Stablänge der Buchstabe ℓ verwendet, die Indizes ℓ und r bezeichnen das linke oder rechte Stabende. Das linke Stabende ist der Koordinatenursprung der lokalen Koordinaten.

A3.1 Ebenes Fachwerkelement

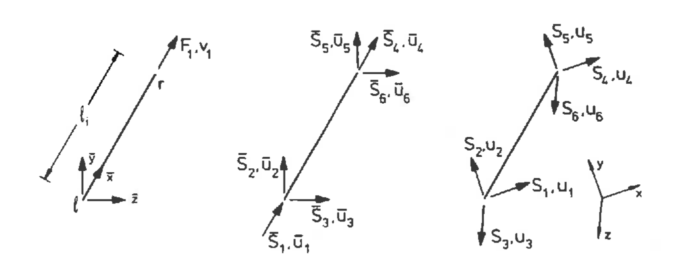


$$\underline{T}^i = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right] \qquad \underline{L}_D{}^i = \left[\begin{array}{cc|cc} c & -s & & \\ s & c & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} \\ \hline & & c & -s \\ \multicolumn{2}{c|}{\underline{0}} & s & c \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^i)^T = \left[\begin{array}{c} -c \\ -s \\ \hline c \\ s \end{array}\right]$$

$$\underline{f}^i = \left[\frac{\ell}{EA}\right] \qquad \underline{k}_r^i = \left[\frac{EA}{\ell}\right] \qquad \underline{k}^i = \frac{EA}{\ell}\left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline & \text{sym.} & c^2 & cs \\ & & & s^2 \end{array}\right]$$

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1}{\ell}\left[\begin{array}{cc|cc} s^2 & -sc & -s^2 & sc \\ & c^2 & sc & -c^2 \\ \hline & \text{sym.} & s^2 & -sc \\ & & & c^2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \\ s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i \end{array}$$

A3.2 Räumliches Fachwerkelement



$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D^{\,i} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} c_{11} & c_{21} & c_{31} & & & \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & & \underline{0} & \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & & & \\ \hdashline & & & c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ & \underline{0} & & c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ & & & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -c_{11} \\ -c_{12} \\ -c_{13} \\ \hdashline c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^i = \left[\frac{\ell}{EA}\right] \qquad \underline{k}_r^i = \left[\frac{EA}{\ell}\right]$$

$$\underline{k}^i = \frac{EA}{\ell}\left[\begin{array}{ccc:ccc} c_{11}^2 & c_{11}c_{12} & c_{11}c_{13} & -c_{11}^2 & -c_{11}c_{12} & -c_{11}c_{13} \\ & c_{12}^2 & c_{12}c_{13} & -c_{12}c_{11} & -c_{12}^2 & -c_{12}c_{13} \\ & & c_{13}^2 & -c_{13}c_{11} & -c_{13}c_{12} & -c_{13}^2 \\ \hdashline & & & c_{11}^2 & c_{11}c_{12} & c_{11}c_{13} \\ & \text{sym.} & & & c_{12}^2 & c_{12}c_{13} \\ & & & & & c_{13}^2 \end{array}\right] \quad \text{mit } c_{ij} = \cos\alpha_{ij}$$

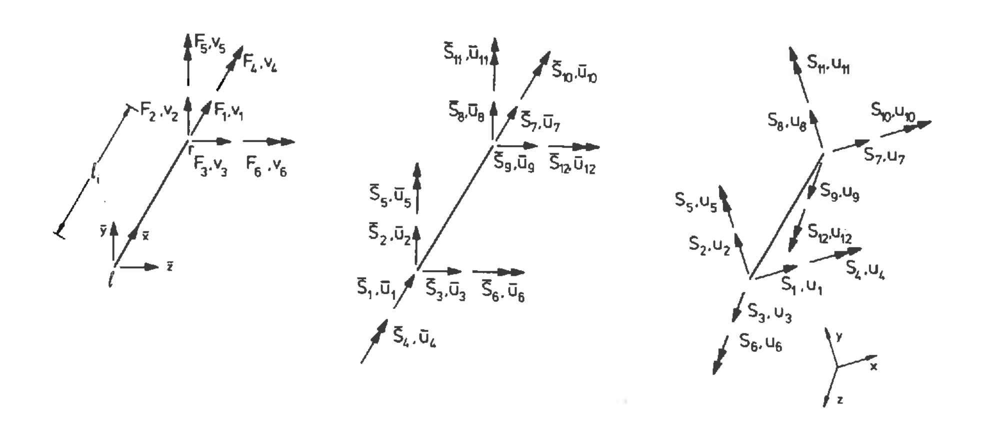
Berechnung der Kosinuswerte ($\cos \alpha_{ij}$) nach Abschnitt 3.4 Gleichung (3.6).

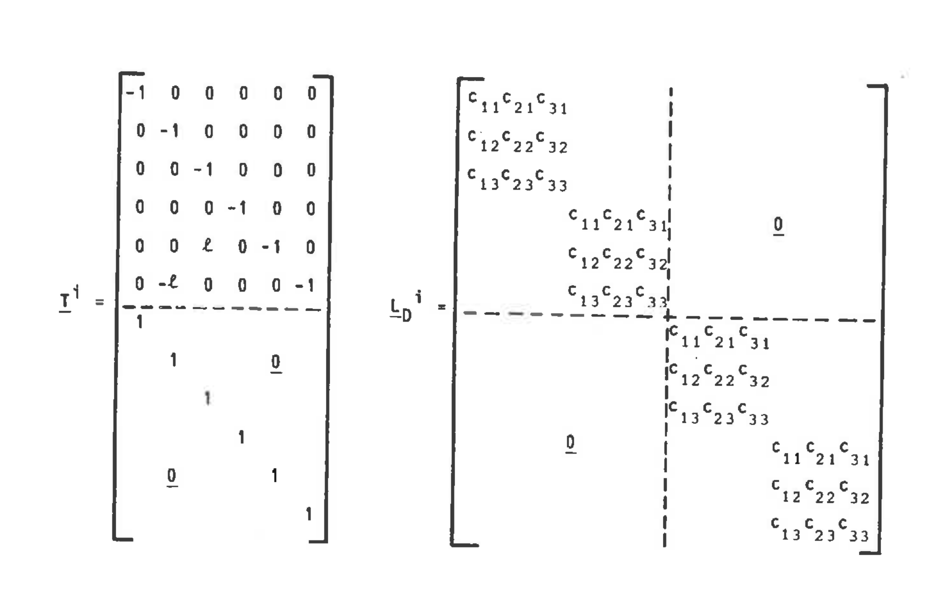
$c_{11} = (x_r - x_\ell)/\ell$

$c_{12} = (y_r - y_\ell)/\ell$

$c_{13} = (z_r - z_\ell)/\ell$

A3.3 Räumliches Stabelement





$$\underline{T}^i = \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \ell & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -\ell & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & \underline{0} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & \underline{0} & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \end{array}\right] \qquad \underline{L}_D{}^i = \left[\begin{array}{cc|cc} \begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} & \underline{0} & \\ \hline & & \begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} & \\ & \underline{0} & & \begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{matrix} \end{array}\right]$$

$c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$

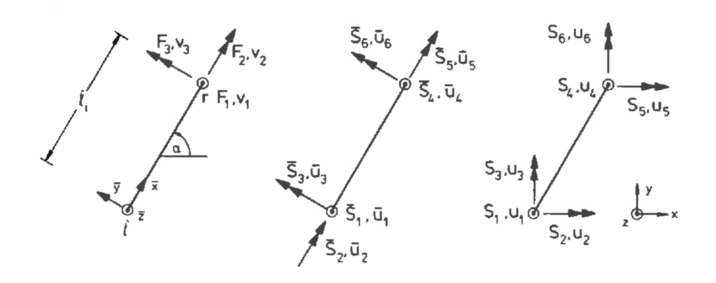
$$
(\underline{a}^i)^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
-c_{11} & -c_{21} & -c_{31} & & & \\
-c_{12} & -c_{22} & -c_{32} & & \underline{0} & \\
-c_{13} & -c_{23} & -c_{33} & & & \\
0 & -\ell c_{31} & \ell c_{21} & -c_{11} & -c_{21} & -c_{31} \\
0 & -\ell c_{32} & \ell c_{22} & -c_{12} & -c_{22} & -c_{32} \\
0 & -\ell c_{33} & \ell c_{23} & -c_{13} & -c_{23} & -c_{33} \\
\hline
c_{11} & c_{21} & c_{31} & & & \\
c_{12} & c_{22} & c_{32} & & \underline{0} & \\
c_{13} & c_{23} & c_{33} & & & \\
 & & & c_{11} & c_{21} & c_{31} \\
 & \underline{0} & & c_{12} & c_{22} & c_{32} \\
 & & & c_{13} & c_{23} & c_{33}
\end{array}\right]
\qquad
\underline{f}^i = \begin{bmatrix}
\frac{\ell}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{\ell^3}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^2}{2EI_z} \\
 & & \frac{\ell^3}{3EI_y} & 0 & \frac{-\ell^2}{2EI_y} & 0 \\
 & & & \frac{\ell}{GI_T} & 0 & 0 \\
 & \text{sym.} & & & \frac{\ell}{EI_y} & 0 \\
 & & & & & \frac{\ell}{EI_z}
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{k}_r^i = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{\ell^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\
 & & & \frac{GI_T}{\ell} & 0 & 0 \\
 & \text{sym.} & & & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{\ell}
\end{bmatrix}
$$

$\underline{k}^i = (\underline{a}^i)^T \underline{k}_r^i \underline{a}^i$
Multiplikationen vom Rechner ausführen lassen!

Berechnung der Kosinuswerte ($\cos \alpha_{ij}$) nach Abschnitt 3.4 Gleichung (3.6).

A3.4 Trägerrostelement



$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \ell & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D{}^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & c & -s & & \underline{0} & \\ & s & c & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & \underline{0} & & & c & -s \\ & & & & s & c \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\ell s & -c & s \\ \ell c & -s & -c \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad \underline{f}^i = \begin{bmatrix} \dfrac{\ell^3}{3EI_y} & 0 & \dfrac{-\ell^2}{2EI_y} \\ 0 & \dfrac{\ell}{GI_T} & 0 \\ \dfrac{-\ell^2}{2EI_y} & 0 & \dfrac{\ell}{EI_y} \end{bmatrix}$$

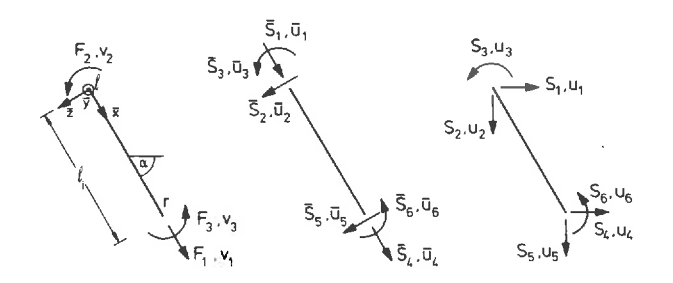
$$\underline{k}_r^i = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \dfrac{6EI_y}{\ell^2} \\ 0 & \dfrac{GI_T}{\ell} & 0 \\ \dfrac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & \dfrac{4EI_y}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$$
$$s \equiv \sin\alpha = (y_r - y_\ell)/\ell_i$$

$$
\underline{k}^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
12c_1/\ell^2 & 18c_1 s/\ell & -6c_1 c/\ell & -12c_1/\ell^2 & 6c_1 s/\ell & -6c_1 c/\ell \\
 & 28c_1 s^2+c_2 c^2 & (8c_1+c_2)sc & -18c_1 s/\ell & 10c_1 s^2-c_2 c^2 & (-10c_1+c_2)cs \\
 & & 6c_1 c^2+c_2 s^2 & 6c_1 c/\ell & (-2c_1+c_2)sc & 2c_1 c^2+c_2 s^2 \\
\hline
 & & & 12c_1/\ell^2 & -6c_1 s/\ell & 6c_1 c/\ell \\
 & \text{sym.} & & & 4c_1 s^2+c_2 c^2 & (4c_1+c_2)sc \\
 & & & & & 4c_1 c^2+c_2 s^2
\end{array}\right]
$$

$c_1 = EI_y/\ell \quad c_2 = GI_T/\ell$

A3.5 Ebenes Stabelement Typ-a



$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & -1/\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\ell & 1/\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & 0 & & & \\ s & c & 0 & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & 0 \\ & \underline{0} & & s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -c & s/\ell & s/\ell \\ -s & -c/\ell & -c/\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline c & -s/\ell & -s/\ell \\ s & c/\ell & c/\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{f}^i = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{3EI_y} & \frac{-\ell}{6EI_y} \\ 0 & \frac{-\ell}{6EI_y} & \frac{\ell}{3EI_y} \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$$

$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$$

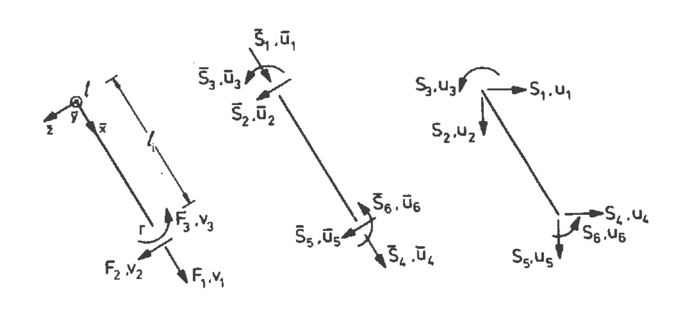
$$\underline{k}_r^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{\ell} & \frac{2EI_y}{\ell} \\ 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & \frac{4EI_y}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^i = \frac{2EI_y}{\ell}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
6s^2/\ell^2+c_1c^2 & -6sc/\ell^2+c_1sc & 3s/\ell & -6s^2/\ell^2-c_1c^2 & 6sc/\ell^2-c_1sc & 3s/\ell \\
 & 6c^2/\ell^2+c_1s^2 & -3c/\ell & 6sc/\ell^2-c_1sc & -6c^2/\ell^2-c_1s^2 & -3c/\ell \\
 & & 2 & -3s/\ell & 3c/\ell & 1 \\
\hline
 & \text{sym.} & & 6s^2/\ell^2+c_1c^2 & -6sc/\ell^2+c_1sc & -3s/\ell \\
 & & & & 6c^2/\ell^2+c_1s^2 & 3c/\ell \\
 & & & & & 2
\end{array}\right]$$

$c_1 = A/2I_y$

$$\underline{k}_g^i = F_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{6s^2}{5\ell} & -\frac{6sc}{5\ell} & \frac{s}{10} & -\frac{6s^2}{5\ell} & \frac{6sc}{5\ell} & \frac{s}{10} \\
 & \frac{6c^2}{5\ell} & -\frac{c}{10} & \frac{6sc}{5\ell} & -\frac{6c^2}{5\ell} & -\frac{c}{10} \\
 & & \frac{2\ell}{15} & -\frac{s}{10} & \frac{c}{10} & -\frac{\ell}{30} \\
\hline
 & & & \frac{6s^2}{5\ell} & -\frac{6sc}{5\ell} & -\frac{s}{10} \\
 & \text{sym.} & & & \frac{6c^2}{5\ell} & \frac{c}{10} \\
 & & & & & \frac{2\ell}{15}
\end{array}\right]$$

A3.6 Ebenes Stabelement Typ-b



$$\underline{T}^i = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \ell & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{L}_D^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & 0 & & & \\ s & c & 0 & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & 0 \\ & \underline{0} & & s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^i)^T = \left[\begin{array}{ccc} -c & s & 0 \\ -s & -c & 0 \\ 0 & \ell & -1 \\ \hline c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \underline{f}^i = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^3}{3EI_y} & \frac{-\ell^2}{2EI_y} \\ 0 & \frac{-\ell^2}{2EI_y} & \frac{\ell}{EI_y} \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i$$
$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$$

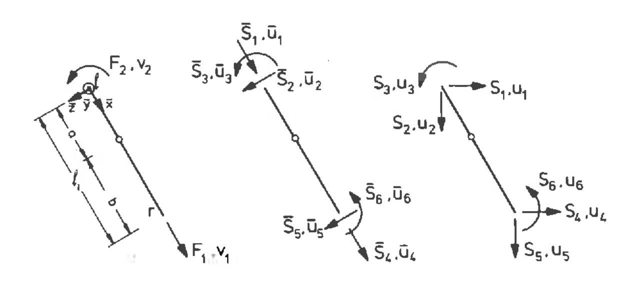
$$\underline{k}_r^i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{\ell^3} & \frac{6EI_y}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & \frac{4EI_y}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^i = \frac{2EI_y}{\ell}\left[\begin{array}{ccc|ccc}
6s^2/\ell^2+c_1c^2 & -6sc/\ell^2+c_1sc & 3s/\ell & -6s^2/\ell^2-c_1c^2 & 6sc/\ell^2-c_1sc & 3s/\ell \\
 & 6c^2/\ell^2+c_1s^2 & -3c/\ell & 6sc/\ell^2-c_1sc & -6c^2/\ell^2-c_1s^2 & -3c/\ell \\
 & & 2 & -3s/\ell & 3c/\ell & 1 \\
\hline
 & \text{sym.} & & 6s^2/\ell^2+c_1c^2 & -6sc/\ell^2+c_1sc & -3s/\ell \\
 & & & & 6c^2/\ell^2+c_1s^2 & 3c/\ell \\
 & & & & & 2
\end{array}\right]$$

$$c_1 = A/2I_y$$

$$\underline{k}_g^i = F_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{6s^2}{5\ell} & -\frac{6sc}{5\ell} & \frac{s}{10} & -\frac{6s^2}{5\ell} & \frac{6sc}{5\ell} & \frac{s}{10} \\
 & \frac{6c^2}{5\ell} & -\frac{c}{10} & \frac{6sc}{5\ell} & -\frac{6c^2}{5\ell} & -\frac{c}{10} \\
 & & \frac{2\ell}{15} & -\frac{s}{10} & \frac{c}{10} & -\frac{\ell}{30} \\
\hline
 & & & \frac{6s^2}{5\ell} & -\frac{6sc}{5\ell} & -\frac{s}{10} \\
 & \text{sym.} & & & \frac{6c^2}{5\ell} & \frac{c}{10} \\
 & & & & & \frac{2\ell}{15}
\end{array}\right]$$

A3.7 Stabelement mit Momentengelenk



$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/a \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1/a \\ 0 & b/a \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D{}^i = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & 0 & & & \\ s & c & 0 & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & c & -s & 0 \\ & \underline{0} & & s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -c & s/a \\ -s & -c/a \\ 0 & 1 \\ \hline c & -s/a \\ s & c/a \\ 0 & b/a \end{bmatrix} \qquad \underline{f}^i = \frac{\ell}{6EI_y} \begin{bmatrix} \frac{6I_y}{A} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{\ell}\left(1+\frac{b^3}{a^3}\right) \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \qquad \underline{k}_r^i = \frac{6EI_y}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{A}{6I_y} & 0 \\ 0 & \frac{\ell a^2}{2(a^3+b^3)} \end{bmatrix}$$

$$s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i$$

$$\underline{k}^i = \frac{2EI_y}{\ell}\left[\begin{array}{ccc:ccc}
c_1c_4^2+c_2c^2 & -c_1c_4c_5+c_2sc & c_1c_4 & -c_1c_4^2-c_2c^2 & c_1c_4c_5-c_2sc & c_1c_3c_4 \\
 & c_1c_5^2+c_2s^2 & -c_1c_5 & c_1c_4c_5-c_2cs & -c_1c_5^2-c_2s^2 & -c_1c_3c_5 \\
 & & c_1 & -c_1c_4 & c_1c_5 & c_1c_3 \\
\hdashline
 & \text{sym.} & & c_1c_4^2+c_2c^2 & -c_1c_4c_5+c_2cs & -c_1c_3c_4 \\
 & & & & c_1c_5^2+c_2s^2 & c_1c_3c_5 \\
 & & & & & c_1c_3^2
\end{array}\right]$$

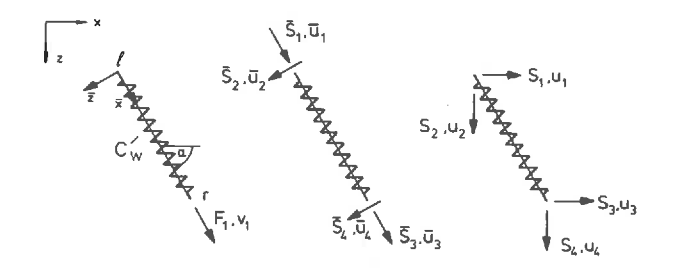
$c_1 = \dfrac{3\ell a^2}{2(a^3+b^3)}$ $\quad c_2 = A/(2I_y)$ $\quad c_3 = b/a$ $\quad c_4 = s/a$ $\quad c_5 = c/a$

besser:

$$\underline{k}^i = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
c_1s^2+c_2c^2 & (-c_1+c_2)sc & c_1sa & -c_1s^2-c_2c^2 & (c_1-c_2)sc & c_1sb \\
 & c_1c^2+c_2s^2 & -c_1ca & (c_1-c_2)sc & -c_1c^2-c_2s^2 & -c_1cb \\
 & & c_1a^2 & -c_1sa & c_1ca & c_1ab \\
\hdashline
 & & & c_1s^2+c_2c^2 & (-c_1+c_2)sc & -c_1sb \\
 \text{Symmetrisch} & & & & c_1c^2+c_2s^2 & c_1cb \\
 & & & & & c_1b^2
\end{array}\right]$$

$c_1 = \dfrac{3EI_y}{a^3+b^3}$ $\qquad c_2 = \dfrac{EA}{\ell}$

A3.8 Senkfeder in der Ebene



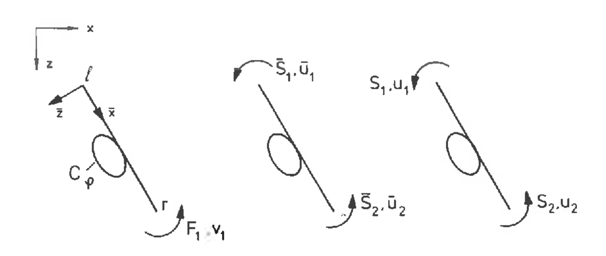
$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D^i = \left[\begin{array}{cc|cc} c & -s & & \\ s & c & \multicolumn{2}{c}{\underline{0}} \\ \hline & & c & -s \\ \multicolumn{2}{c|}{\underline{0}} & s & c \end{array}\right] \qquad (a^i)^T = \begin{bmatrix} -c \\ -s \\ \hline c \\ s \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^i = [1/c_W] \qquad \underline{k}_r^i = [c_W]$$

$$\underline{k}^i = c_W \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline & \text{sym.} & c^2 & cs \\ & & & s^2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} c \equiv \cos\alpha = (x_r - x_\ell)/\ell_i \\ s \equiv \sin\alpha = (z_r - z_\ell)/\ell_i \end{array}$$

c_W ist die Federkonstante.

A3.9 Drehfeder in der Ebene



$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_D^i = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^i = \left[1/c_\varphi\right] \qquad \underline{k}_r^i = \left[c_\varphi\right]$$

$$\underline{k}^i = c_\varphi \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right]$$

c_φ ist die Federkonstante.

Literaturverzeichnis

/1/ Argyris, J. H.: Die Matrizentheorie der Statik. Ingenieur-Archiv 25, 1957, S. 174 - 192.

/2/ Argyris, J. H.; Patton, P. C.: A Look into the Future - How Computers will influence Engineering. Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 71, Apr. 1967, pp. 244 - 252.

/3/ Bleich, F.; Melan, E.: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin. Springer, 1927.

/4/ Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. 11. Auflage, Zürich. Deutsch, 1971.

/5/ Brown, C. J.: Computers in Civil Engineering - An Overview. Computing in Civil Engineering, Conf. Proc. June 1978 Atlanta (USA). New York, American Society of Civil Engineering.

/6/ Buck, K. E. u.a.: Einige allgemeine Programmsysteme für finite Elemente. In: Finite Elemente in der Statik, herausgegeben von K. E. Buck u.a. Berlin. Ernst & Sohn, 1973.

/7/ Castigliano, A.: Theorie de L'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. (The theory of equilibrium of elastic systems and its applications). TRANSL. by E. S. Andrews. Unabriged and corr. replubl. of the 1919 ED. under the title: Elastic Stresses in Structures. New York. Dover Publ. 1966.

/8/ Castigliano, A.: Intorno ad una proprieta dei sistemi elastici. Atti della Academia delle Scienze di Torino, 1875.

/9/ Chwalla, E.: Einführung in die Baustatik. Neudruck der 2. Auflage, Köln. Stahlbau - Verlags GmbH, 1954.

/10/ Collins, R. J.: Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 6, pp. 345 - 356, 1973.

/11/ Courant, R.; Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik. 3. Auflage Band 1 und 2. Auflage Band 2, Berlin. Springer, 1968.

/12/ Crawford, C. R.: Reduction of a Band-Symmetric Generalized Eigenvalue Problem. Communications of the Association for Computing Machinery, Jan. 1973, Vol. 16, No. 1.

/13/ Cross, H.: Analysis of Continous Frames by Distributing Fixed-End Moments. Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 56, S. 919, 1930.

/14/ Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. Wien. Springer, 1977.

/15/ Denke, P. H.: A General Digital Computer Analysis of Statically Indeterminate Structures. NASA TND-1666, Washington. 1962.

/16/ Durân, M. u.a.: KRAM'76 - Ein FORTRAN-Programm zur Berechnung allgemeiner Tragwerke. Forschungsberichte 1 und 3 aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Essen - Gesamthochschule, 1977/78.

/17/ Engesser, F.: Die Berechnung der Stockwerkrahmen. Der Eisenbau, Nr. 3, 1920, S. 81 - 88.

/18/ Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv, XXIV. Band, 1956, S. 216 - 232.

/19/ Flessner, H.: Graphische Ein- und Ausgabe von FE-Netzen im Dialog mit dem Interaktiven Konstruktionsplatz. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/20/ Föppl, A.: Theorie des Fachwerks. Leipzig. A. Kröner, 1880.

/21/ Fuchs, G.; Roy, J. R.; Schrem, E.: Hypermatrix Solution of Large Sets of Symmetric Positiv-Definite Linear Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1972), pp. 197 - 216.

/22/ Grooms, H. R.: Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98 No. St 1. Jan. 1972, pp. 203 - 214.

/23/ Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin. Springer, 1925.

/24/ Grüning, M.: Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit für einige hochgradig statisch unbestimmte Systeme. Der Eisenbau, 12. Jahrgang Nr. 11, 8. Nov. 1921, S. 305 - 322.

/25/ Hartmann, B.; Schrader, K.-H.; Winkel, G.: MESY. Ein Programmsystem zur Untersuchung von Tragwerken. Essen. Vulkan-Verlag Classen, 1975.

/26/ Hees, G.: Die Berücksichtigung der vorläufigen Richtlinien für das Aufstellen und Prüfen elektronischer Standsicherheitsberechnungen und der DIN 1080 'Begriffe, Formelzeichen und Einheiten im Bauingenieurwesen' bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/27/ Hertwig, A.: Die Lösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Müller-Breslau-Festschrift 1912, S. 37.

/28/ Hirschfeld, K.: Baustatik. Theorie und Beispiele. 3., neubearbeitete Auflage Teil 1 - 2. Berlin. Springer, 1969.

/29/ Irons, B. M.: Roundoff Criteria in Direct Stiffness Solutions. AIAA Journal, July 1968, Vol. 6, No. 7, pp. 1308 - 1312.

/30/ Irons, B. M.: A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 2, pp. 5 - 32, 1970.

/31/ ISIS-Software Report, Report - 79 (Statik und Dynamik). Infratest Information Services. München.

/32/ Jennings, A.; Tuff, A. D.: A Direct Method for Solution of Large Sparse Symmetric Simultanous Equations. In: Large Sparse Sets of Linear Equations. Proceedings of the Oxford Conference of the Institute of Mathematics and its Applications. Held in April 1970. ED. by J. K. Reid. London. Academic Press, 1971.

/33/ Kani, G.: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen. 12. Auflage, Stuttgart. Wittwer, 1968.

/34/ Kenngott, R. L.: Engineering Productivity: The Computer Payoff, American Society of Civil Engineers, pp. 21 - 36.

/35/ Kersten, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Verfahren der Übertragungsmatrizen. Mit einem Vorwort und einer Anleitung zum Programmieren von S. Falk. Unverändeter Nachdruck Berlin. Springer, 1962.

/36/ Key, E. J.: Computer Program for Solution of Large, Sparse, Unsymmetric Systems of Linear Equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp. 497 - 509, 1973.

/37/ Krätzig, W. B. u.a.: MISS-SMIS: Ein Matrizeninterpretationssystem der Strukturmechanik für Praxis, Forschung und Lehre. Techn. Wiss. Mitteilungen, In-

stitut für Konstr. Ingenieurbau Ruhr-Universität Bochum. Heft 77-5, 1977.

/38/ Land, R.: Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verbandes, Bd. 40, S. 11 und S. 162, 1888.

/39/ Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik. Bd. 1 - 3. Düsseldorf. Bertelsmann-Universitätsverlag, 1974.

/40/ Leipholz, H.: Stability Theory. New York. Academic Press, 1970.

/41/ Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechteckes (Dissertation). Dresden, 1915.

/42/ Lipp, W.; Thierauf, G.: Die Bedeutung des Kraft- und Weggrößenverfahrens für die Optimierung von Tragwerken nach der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode. 10. Kongreß der IVBH, Tokio (Japan) 6. - 11. Sept. 1976. Zürich. Sekretariat der IVBH.

/43/ Lopez, L. A. e.a.: Application of Data Management to Structures. Conference on Computing in Civil Engineering, Atlanta, Georgia. June 26. - 29., 1978. pp. 477 - 496. New York. American Society of Civil Engineering.

/44/ Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4. Ed., Repr. of the 1927 Ed. New York. Dover Publication, 1944.

/45/ Martin, H. C.; Carey, G. F.: Introduction to Finite Element Analysis. Theory and Application. New York. McGraw-Hill, 1973.

/46/ Maxwell, C.: On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames. Philosophical Magazine, Bd. 27, p. 294, 1864.

/47/ Meek, J. L.: Matrix Structural Analysis. New York. McGraw-Hill, 1971.

/48/ Menabrea, F.: Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systêmes êlastiques. Comptes rendus 1858, I, S. 1056.

/49/ von Mises, R.: Ober Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Mechanik 1923, S. 406.

/50/ Mohr, O.: Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurverbandes zu Hannover, Bd. XX. (1874), S. 223 - 238.

/51/ Mohr, O.: Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurverbandes zu Hannover, (1860), S. 323 und S. 407.

/52/ Mroz, Z.: Mathematical Models of Inelastic Material Behaviour. Solid Mechanics Division University of Waterloo, Waterloo, Ontario (Canada), 1973.

/53/ Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen. 4. vermehrte und verbesserte Auflage, Leipzig. A. Kröner, 1913.

/54/ Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. I, II, III. Leipzig. A. Kröner, 1892.

/55/ Murray, N. W.; Thierauf, G.: Tables for the Design and Analysis of Stiffened Plates. Vieweg-Verlag. (erscheint demnächst)

/56/ Navier, C. L. M. H.: Resumée des leçons données à l'école des ponts et chaussées. Mémoires de l'académie des sciences, Paris 1827.

/57/ Orringer, O. e.a.: FEABL User's guide. Springfield

(USA). Massachusetts Institute of Technology, Aug. 1972.

/58/ Ostenfeld, A.: Auflösung von fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Der Eisenbau 1913, S. 120.

/59/ Pegels, G.: Programmsystem Konstruktion, Arbeitsvorbereitung und Fertigung im Stahlbau. Techn. Wiss. Mitteilungen, Institut für Konstr. Ingenieurbau Ruhr-Universität Bochum. Heft 75-10, 1975.

/60/ Pegels, G. u.a.: Programmsystem Rechnergestütztes Fertigen im Stahlbau BO - ROIK/100. Techn. Wiss. Mitteilungen, Institut für Konstr. Ingenieurbau Ruhr-Universität Bochum. Heft 79-4, 1979.

/61/ Petersen, Ch.: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen (Reduktionsverfahren) für den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger. Die Bautechnik 3/ 1965, S. 87 - 89.

/62/ Petersen, Ch.: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für gekrümmte Träger. Der Bauingenieur 41, 1966 Heft 3, S. 98 - 102.

/63/ Petersen, Ch.: Die Übertragungsmatrix des kreisförmig gekrümmten Trägers auf elastischer Unterlage. Die Bautechnik 8/1967, S. 289 - 294.

/64/ Petersen, Ch.: Einführung in die Stabilitätstheorie. Vorlesungen der Technischen Hochschule München, Lehrstuhl für Stahlbau, München. Jan. 1967.

/65/ Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 3., neubearbeitete Auflage, Berlin. Springer, 1975.

/66/ Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis. New York. McGraw-Hill, 1968.

/67/ Ralston, A.; Wilf, H. S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner (Mathematical Methods for Digital Computers), Deutsch. Übersetzt aus dem Amerikani-

schen von B. Thüring. 2. Auflage, Bd. 1 und 2. München. Oldenbourg, 1972.

/68/ Reckling, K.-A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Berlin. Springer, 1967.

/69/ Reyer, E.: Zur Prüfung und Kontrolle von Finite - Element - Konstruktionsberechnungen. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/70/ Ritter, A.: Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. Hannover, (1863).

/71/ Robinson, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods. New York. Wiley, 1973.

/72/ Roik, K.; Carl, J.; Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1972.

/73/ Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau: Grundlagen. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/74/ Sattler, K.: Lehrbuch der Statik. Theorie und ihre Anwendung. Bd. 1 und 2. Berlin. Springer, 1969.

/75/ Schrem, E.: Computer Implementation of the Finite Element Procedure. ONR-Symposium on Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics Sept. 8. - 10., 1971. University of Illinois at Urbana-Champaign Urbana, Illinois (USA).

/76/ Spiegel, W.: Programmbibliothek STATIK I. Köln. Rohde und Schwarz Vertriebs - GmbH, 1979.

/77/ Stein, E.: Kriterien für Finite - Element - Programme aus der Sicht prüffähiger statischer Berechnungen. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/78/ Steinbuch, K.; Weber, W.: Taschenbuch der Informatik. 3. Bd., 3. neubearbeitete Auflage, Berlin. Springer, 1974.

/79/ Stüssi, F.: Vorlesung über Baustatik. 5. Auflage Bd. 1. Basel. Birkhäuser, 1975.

/80/ Tauchert, Th. R.: Energy Principles in Structural Mechanics. New York. McGraw-Hill, 1974.

/81/ Thierauf, G.: Elastisch - plastische Formänderungen biegesteifer Tragwerke nach der Spannungstheorie 2. Ordnung. Ingenieur-Archiv 42, 1973, S. 285 - 295.

/82/ Thierauf, G.: Traglastberechnung und -bemessung von Stockwerkrahmen mit Hilfe der linearen Programmierung. Der Stahlbau, 1, 1975, S. 19 - 25.

/83/ Thierauf, G.; Topçu, A.: Structural Optimization using the Force Method. World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics, Bournemouth (England), 12. - 17. Okt. 1975.

/84/ Thierauf, G.: Optimierung elastischer Tragwerke und Finite Elementmethoden. Festschrift W. Zerna und Institut für Konstruktiven Ingenieurbau Bochum. Düsseldorf. Werner, 1976.

/85/ Topçu, A.: Ein Beitrag zur systematischen Berechnung finiter Elementtragwerke nach der Kraftmethode. Dissertation, Essen 1978.

/86/ Weber, B.: MISS-SMIS: Ein modulares praxisorientiertes Rechenprogramm für Aufgabenstellungen der Statik und Dynamik der Tragwerke. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a.. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/87/ Westlake, J. R.: A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations. Huntington. Krieger, 1975.

/88/ Wilkinson, J. H.; Reinsch, C.: Lineare Algebra. Herausgegeben von F. L. Bauer. Berlin. Springer, 1971.

/89/ Wilson, E.: SMIS, Symbolic Matrix Interpretative System. Rep. No. UC SESM 73-3. Berkeley (USA). National Information Service Earthquake Engineering.

/90/ Withum, D.: Grundsätze, Konzepte und Beispiele weiterer Entwicklungen. In: Finite Elemente in der Baupraxis. Herausgegeben von P. J. Pahl u.a. Berlin. W. Ernst & Sohn, 1978.

/91/ Worch, G.: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton und Eisen 1924, Heft 4, S. 39.

/92/ Worch, G.: Lineare Gleichungen in der Baustatik. Betonkalender Teil 2, Berlin. W. Ernst & Sohn, 1960.

/93/ Wurmnest, W.: Einsatz der Methode der finiten Elemente. VDI-Berichte Nr. 261, 1976, S. 37 - 45.

/94/ Zienkiewicz, O. C.: Methode der Finiten Elemente (Finite Element Method in Engineering Science, Deutsch). Übersetzt nach der 2. neubearbeiteten und erweiterten Auflage von einem Autorenkollektiv der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt unter Leitung von J. Beyreuther und E. Müller. München. Hanser, 1975.

/95/ Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technische Anwendung. 4., neubearbeitete Auflage, Berlin. Springer, 1964.

/96/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5., neubearbeitete Auflage, Berlin. Springer, 1965.

Lehrbuchverzeichnis

Beaufait, F. W.: Basic Concepts of Structural Analysis. 1977 New Jersey, Prentice-Hall.

Borg, S. F.; Gennaro, J. J.: Modern Structural Analysis. 1969 New York, van Nostrand Reinhold Company.

Chobot, K.: Matrizenrechnung in der Baumechanik. 1970 Wien, Springer-Verlag.

Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. 1977 Leipzig, VEB Fachbuchverlag.

Gallagher, R. H.: Finite - Element - Analysis. 1976 Berlin, Springer-Verlag.

Hahn, H. G.: Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. 1975 Frankfurt a. Main, Akademische Verlagsgesellschaft.

Laursen, H. I.: Matrix Analysis of Structures. 1966 New York, McGraw-Hill Book Company.

Livesley, R. K.: Matrix Methods of Structural Analysis. 2nd Edition. 1975 Oxford, Pergamon Press.

Majid, K. I.: Non-linear Structures. 1972 London, Butterworths.

Martin, H. C.; Carey, G. F.: Introduction to Finite Element Analysis. 1973 New York, McGraw-Hill Book Company.

Meek, J. L.: Matrix Structural Analysis. 1971 Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha.

Norris, C. H.; Wilbur, J. B.; Utku, S.: Elementary Structural Analysis. 3rd Edition. 1976 Tokyo, McGraw-Hill, Kogakusha.

Pestel, E. C.; Leckie, F. A.: Matrix Method in Elastomechanics. 1963 New York, McGraw-Hill Book Company.

Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis.

1968 New York, McGraw-Hill Book Company.

Robinson, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods. 1973 London, John Wiley & Sons.

Sattler, K.: Lehrbuch der Statik (4 Bände). 1969 - 1974 Berlin, Springer-Verlag.

Szabo, J.; Roller, B.: Anwendung der Matrizenrechnung auf Stabwerke. 1978 Budapest, Akadémiai Kiadó.

Tauchert, Th. R.: Energy Principles in Structural Mechanics. 1974 Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha.

Uhrig, R.: Elastostatik und Elastokinetik in Matrizenschreibweise. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen. 1973 Berlin, Springer-Verlag.

Vanderbilt, M. D.: Matrix Structural Analysis. 1974 New York, Quantum Publishers.

Willems, N.; Lucas, W. M.: Structural Analysis for Engineers. 1978 New York, McGraw-Hill Book Company.

Sach- und Namenregister

WICHTIGE ABKUERZUNGEN: EL. - ELEMENT
E.L.- EINFLUSSLINIE
F.E.- FINITE ELEMENTE